Capítulo 2

Geometría

2.1. Trigonometría

2.1.1. Razones trigonométricas

Problema 78 Sabiendo que $\tan\alpha = 2$, calcular el resto de las razones trigonométricas; teniendo en cuenta que α pertenece al tercer cuadrante.
Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2} = 0,5$$

Sabemos que $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ y aplicando esta fórmula quedaría:
$2^2 + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec = \pm\sqrt{5} = \pm 2,24$. Como en el tercer cuadrante la secante es negativa concluimos con el resultado $\sec\alpha = -2,24$.

Como $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ podemos despejar $\cos\alpha$ y nos quedaría $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-2,24} = -0,45$, es decir $\cos\alpha = -0,45$.

Ahora vamos a utilizar la fórmula $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$ y tendríamos:
$1 + \frac{1}{4} = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm 1,12$. Como en el tercer cuadrante la cosecante es negativa será $\csc\alpha = -1,12$.

Como $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{1}{-1,12} = -0,89$ es decir
$\sin\alpha = -0,89$

Problema 79 Teniendo en cuenta que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ y que α pertenece al primer cuadrante, calcular:

$$\sin(\alpha + 30^o);\ \sin(\alpha + 45^o);\ \cos(\alpha - 60^o);\ \tan(60^o - \alpha)$$

Solución:
Se calcula primero $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$:

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$; $\quad \tan\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{8}}{3}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\sin(\alpha+30^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 30^{o}+\cos\alpha\cdot\sin 30^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{8}}{6} = 0,7601$

$\sin(\alpha+45^{o}) = \sin\alpha\cdot\cos 45^{o}+\cos\alpha\cdot\sin 45^{o} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,9024$

$\cos(\alpha-60^{o}) = \cos\alpha\cdot\cos 60^{o}+\sin\alpha\cdot\sin 60^{o} = \frac{\sqrt{8}}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,7601$

$\tan(60^{o}-\alpha) = \frac{\tan 60^{o}-\tan\alpha}{1+\tan 60^{o}\cdot\tan\alpha} = \frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{8}}}{1+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}} = 0,8549$

Problema 80 Hallar las razones trigonométricas de α sabiendo que $\sec\alpha = 3$ y $\alpha \in 4^{o}$ Cuadrante.

Solución:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = 3 \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$
$$\tan\alpha = -2\sqrt{2}$$
$$\cot\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Problema 81 Demuestra que

$$\frac{\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x}{\sin 2x} = \frac{1}{2}$$

Solución:

$$\frac{\sin^3 x\cos x + \cos^3 x\sin x}{\sin 2x} = \frac{(\sin x\cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}$$

Problema 82 Sabiendo que $\csc\alpha = 3$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha = 3 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3},\quad \sec\alpha = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{8}},\quad \cot\alpha = -\sqrt{8}$$

Problema 83 Simplificar:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)$$

Solución:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{5\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{5\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha$$

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{2}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{2}=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{7\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=-\cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{11\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{11\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{2}+\alpha\right)=2\sin\alpha$$

Problema 84 Sabiendo que $\csc\alpha=2$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\csc\alpha=2\Longrightarrow\sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4}+\cos^2\alpha=1\Longrightarrow\cos^2\alpha=\frac{3}{4}\Longrightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\quad\sec\alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad\cot\alpha=-\sqrt{3}$$

Problema 85 Resolver la ecuación trigonométrica siguiente:

$$\sin 2x=2\cos x$$

Solución:

$$2\sin x\cos x-2\cos x=0\Longrightarrow 2\cos x(\sin x-1)=0\Longrightarrow\cos x=0,\quad\sin x=1$$

Luego:

$$\cos x=0\Longrightarrow x=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{3\pi}{2}$$

$$\sin x=1\Longrightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

La solución sería:

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\qquad x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

Problema 86 Resolver la ecuación trigonométrica siguiente:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1$$

Solución:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 \Longrightarrow \cos 2x = 1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2\pi \\ 2x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pi \\ x = 0 \end{array} \right.$$

Las soluciones serían: $x = \pi + 2k\pi$ y $x = 0 + 2k\pi$

Problema 87 Sabiendo que $\tan\alpha = -4$ y que α pertenece al segundo cuadrante, calcular el resto de las razones trigonométricas.

Solución:

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{17} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$\tan\alpha = -4 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{4}$$

Problema 88 Si $\csc\alpha = 3$ y $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ calcula las restantes razones trigonométricas de α.

Solución:

$$\csc\alpha = 3 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \sec\alpha = -\frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1/3}{\sqrt{8}/3} = -\frac{1}{\sqrt{8}}, \quad \cot\alpha = -\sqrt{8}$$

Problema 89 Demostrar que $\dfrac{2\sin^3 x + \sin 2x\cos x}{2\sin x} = 1$

Solución:

$$\frac{2\sin^3 x + \sin 2x\cos x}{2\sin x} = \frac{2\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{2\sin x} = 1$$

Problema 90 Resolver la ecuación trigonométrica

$$\sin 2x\cos x + \cos 2x = 2\sin x + 1$$

Solución:

$$2\sin x\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x + 1$$

$$2\sin x(1-\sin^2 x) + (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 2\sin x + 1$$

$$-2\sin^2 x(\sin x + 1) = 0 \Longrightarrow \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0 + 2k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Problema 91 Si $\cot\alpha = -\dfrac{1}{5}$ y $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ calcula las restantes razones trigonométricas de α.

Solución:

$$\cot\alpha = -\frac{1}{5} \Longrightarrow \tan\alpha = -5$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{26}, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\sin^2\alpha + \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}, \quad \csc\alpha = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

Problema 92 Demostrar que $\tan\alpha\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$

Solución:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$$

$$2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Problema 93 Resolver la ecuación trigonométrica

$$\cos 2x + \cos x\sin 2x = 2\sin x + 1$$

Solución:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos^2 x = 2\sin x + 1$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x + 2\sin x(1-\sin^2 x) = 2\sin x + 1$$

$$-2\sin^2 x - 2\sin^3 x = 0 \Longrightarrow \sin x = 0, \quad \sin x = -1$$

$$\sin x = 0 \Longrightarrow x = 0 + 2k\pi, \quad x = \pi + 2k\pi$$

$$\sin x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Problema 94 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\cot\alpha = -\frac{3}{2}$

Solución:

$$\cot\alpha = -\frac{3}{2} \Longrightarrow \tan\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Problema 95 Resolver la siguiente ecuacción trigonométrica

$$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$$

Solución:

$$\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0 \Longrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + 5\cos x + 3 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + 5\cos x + 3 = 0 \Longrightarrow\ 2\cos^2 + 5\cos x + 2 = 0$$

$$\cos x = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 120^{\mathrm{o}} + 2k\pi \\ x = 240^{\mathrm{o}} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ -2\,\text{No Vale} \end{cases}$$

Problema 96 Demostrar que: $\cot 2x = \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$

Solución:

$$\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cot x - \tan x)$$

Problema 97 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = 2$

Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{5} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 98 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = -\frac{3}{2}$

Solución:

$$\tan\alpha = -\frac{3}{2} \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \frac{\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Problema 99 Resolver la siguiente ecuacción trigonométrica

$$3\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 2 = 0$$

Solución:

$$3\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \Longrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = -1, \;\; t = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \begin{cases} \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 30^{\circ} + 2k\pi \\ x = 150^{\circ} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ -1 \Longrightarrow x = 270^{\circ} + 2k\pi \end{cases}$$

Problema 100 Demostrar que: $\cos^2 x = \frac{\sin 2x}{2\tan x}$

Solución:

$$\frac{\sin 2x}{2\tan x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\frac{\sin x}{\cos x}} = \cos^2 x$$

Problema 101 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$2\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$$

Solución:

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 5\sin x - 3 = 0 \Longrightarrow 4\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow 4t^2 + 5t - 3 = 0 \Longrightarrow t = 1, \;\; t = \frac{1}{4}$$

$$\sin x = \begin{cases} \frac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = 14^{\circ}28'39'' + 2k\pi \\ x = 165^{\circ}31'21'' + 2k\pi \end{cases} \\ \\ 1 \Longrightarrow x = 90^{\circ} + 2k\pi \end{cases}$$

Problema 102 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$

Solución:

$$\tan\alpha = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \cot\alpha = -2$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = \sqrt{5} \Longrightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 103 Resolver la siguiente ecuacción trigonométrica

$$\cos 2x + \cos x = 0$$

Solución:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x = 0 \Longrightarrow \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x = 0 \Longrightarrow$$

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Longrightarrow (t = \sin x) \Longrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Longrightarrow t = -1, \ t = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \begin{cases} \frac{1}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = 60^{o} + 2k\pi \\ x = 300^{o} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ -1 \Longrightarrow x = 180^{o} + 2k\pi \end{cases}$$

Problema 104 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = 2$

Solución:

$$\tan\alpha = 2 \Longrightarrow \cot\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\sqrt{5} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 105 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, sabiendo que $\cot\alpha = -\frac{1}{4}$

Solución:

$$\cot\alpha = -\frac{1}{4} \Longrightarrow \tan\alpha = -4$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha=\frac{\sqrt{17}}{4}\Longrightarrow \sin\alpha=\frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha=-\sqrt{17}\Longrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$$

Problema 106 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$8\cos^2 x+2\sin x-7=0$$

Solución:

$$8(1-\sin^2 x)+2\sin x-7=0\Longrightarrow 8\sin^2 x-2\sin x-1=0\Longrightarrow$$

$$(t=\sin x)\Longrightarrow 8t^2-2t-1=0\Longrightarrow t=\frac{1}{2},\ \ t=-\frac{1}{4}$$

$$\sin x=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=30^{\text{o}}+2k\pi\\ x=150^{\text{o}}+2k\pi\end{array}\right.\\ \\ -\dfrac{1}{4}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=194^{\text{o}}28'39''+2k\pi\\ x=345^{\text{o}}31'20''+2k\pi\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Problema 107 Demostrar que:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x}-\frac{\sin 2x}{\sin x}=\frac{-1}{\cos x}$$

Solución:

$$\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x}-\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=-\cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}=-\frac{1}{\cos x}$$

Problema 108 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, sabiendo que $\cot\alpha=-\frac{1}{3}$

Solución:

$$\cot\alpha=-\frac{1}{3}\Longrightarrow \tan\alpha=-3$$

$$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha=\frac{\sqrt{10}}{3}\Longrightarrow \sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha=-\sqrt{10}\Longrightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Problema 109 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$-6\cos^2 x + \sin x + 4 = 0$$

Solución:

$$-6(1-\sin^2 x) + \sin x + 4 = 0 \Longrightarrow 6\sin^2 x + \sin x + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow 6t^2 + t - 2 = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{2},\ \ t = -\frac{2}{3}$$

$$\sin x = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 30^{\circ} + 2k\pi \\ x = 150^{\circ} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ -\dfrac{2}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = -41^{\circ}48'37'' = 318^{\circ}11'23'' + 2k\pi \\ x = 221^{\circ}48'37'' + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Problema 110 Demostrar que:

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

Solución:

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

Problema 111 Encontrar todas las razones trigonométricas de $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sabiendo que $\tan\alpha = \frac{3}{2}$

Solución:

$$\tan\alpha = \frac{3}{2} \Longrightarrow \cot\alpha = \frac{2}{3}$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha \Longrightarrow \csc\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{3} \Longrightarrow \sin\alpha = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \Longrightarrow \sec\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{2} \Longrightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

Problema 112 Resolver la siguiente ecuación trigonométrica

$$6\cos^2 x + 7\sin x - 8 = 0$$

Solución:

$$6(1-\sin^2 x) + 7\sin x - 8 = 0 \Longrightarrow 6\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0 \Longrightarrow$$

$$(t = \sin x) \Longrightarrow 6t^2 - 7t + 2 = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{2},\ \ t = \frac{2}{3}$$

$$\sin x = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x = 30^{\circ} + 2k\pi \\ x = 150^{\circ} + 2k\pi \end{cases} \\ \\ \dfrac{2}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = 41^{\circ}48'37'' + 2k\pi \\ x = 138^{\circ}11'23'' + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

Problema 113 Demostrar que:

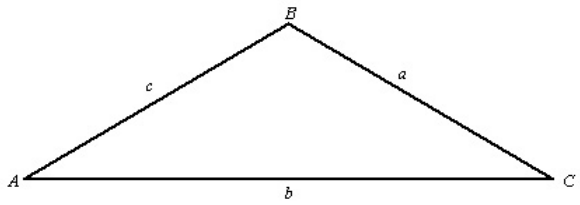
$$\cot 2\alpha = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

Solución:

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \tan\alpha)$$

2.1.2. Resolución de triángulos

Problema 114 Resolver el triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus ángulos $A = 65^o$, $C = 35^o$, y uno de sus lados $b = 15$. Calcular finalmente su área.
Solución:
Tenemos que $A+B+C = 180^o$ luego $B = 180^o - (A+B) = 180^o - (65^o +$



$35^o) = 80^o$
Por el teorema del seno tenemos: $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow a = \frac{15 \cdot \sin 65^O}{\sin 80^O} = 13,8043$

Por el teorema del seno tenemos: $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow c = \frac{15 \cdot \sin 35^O}{\sin 80^O} = 8,7364$

Por la fórmula de Herón calcularemos la superficie de este triángulo:

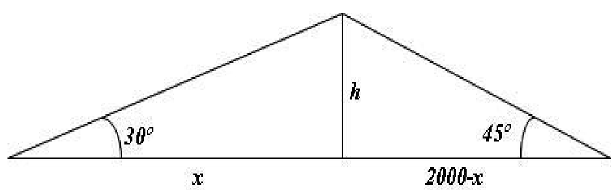
El semiperímetro será $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13,8043+15+8,7364}{2} = 18,77035$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$

$\sqrt{18,77035 \cdot (18,77035 - 13,8043) \cdot (18,77035 - 15) \cdot (18,77035 - 8,7364)} =$

$59,3838.$

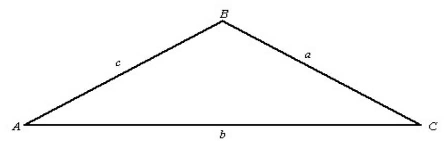
Problema 115 Dos personas separadas por una llanura de $2Km$, observan un globo aerostático con ángulos de 30^o y 45^o respectivamente. Hallar la altura a la que vuela dicho artefacto.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 30^{\circ} = \dfrac{h}{x} \\ \\ \tan 45^{\circ} = \dfrac{h}{2000 - x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h = 732,0508074m \\ \\ x = 1267,949192m \end{array}\right.$$

La solución pedida es que el globo vuela a una altura de $732,0508074m$.

Problema 116 Dado el triángulo



1. Resolverlo sabiendo que $a = 3$, $b = 5$ y $C = 30^{\circ}$, calcular también su área.
2. Demostrar el teorema del seno.

Solución

1.

$$c^2 = 9 + 25 - 30\frac{\sqrt{3}}{2} = 8,02 \Longrightarrow c = 2,83$$

$$\frac{3}{\sin A} = \frac{2,83}{1/2} \Longrightarrow \sin A = 0,529 \Longrightarrow A = 31^{\circ}59'5''$$

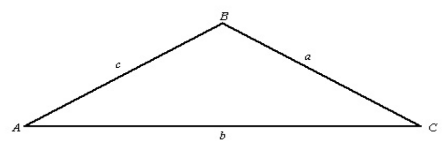
$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 118^{\circ}0'55''$$

$$p = \frac{3 + 5 + 2,83}{2} = 5,415 \Longrightarrow$$

$$S = \sqrt{5,415(5,415 - 3)(5,415 - 5)(5,415 - 2,83)} = 3,74$$

2. Ver teoría

Problema 117 Dado el triángulo



1. Resolverlo sabiendo que $a = 4$, $b = 6$ y $C = 30^{\mathrm{o}}$, calcular también su área.

2. Demostrar el teorema del seno.

Solución

1.

$$c^2 = 16 + 36 - 48\frac{\sqrt{3}}{2} = 10,43 \Longrightarrow c = 3,23$$

$$\frac{4}{\sin A} = \frac{3,23}{1/2} \Longrightarrow \sin A = 0,619 \Longrightarrow A = 38^{\mathrm{o}}15'43''$$

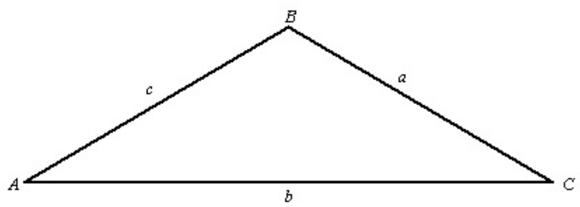
$$B = 180^{\mathrm{o}} - (A + C) = 111^{\mathrm{o}}44'17''$$

$$p = \frac{4 + 6 + 3,23}{2} = 6,615 \Longrightarrow$$

$$S = \sqrt{6,615(6,615 - 4)(6,615 - 6)(6,615 - 3,23)} = 6$$

2. Ver teoría

Problema 118 Dado el triángulo



Resolverlo sabiendo que $a = 5$, $b = 6$ y $C = 135^{\mathrm{o}}$.

Solución

$$c^2 = 25 + 36 - 60\cos 135^{\mathrm{o}} \Longrightarrow c = 10,16$$

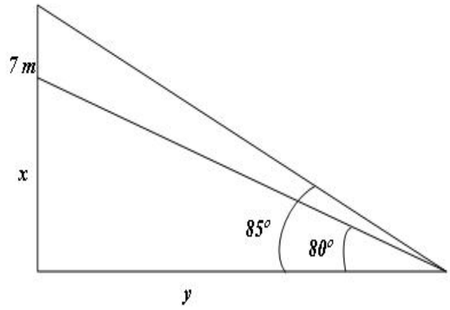
$$\frac{10,16}{\sin 135^{\mathrm{o}}} = \frac{5}{\sin A} \Longrightarrow \sin A = 0,32 \Longrightarrow A = 18^{\mathrm{o}}44'54''$$

$$B = 180^{\mathrm{o}} - (A + C) = 26^{\mathrm{o}}16'$$

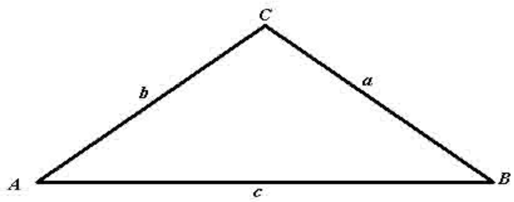
Problema 119 Acaban de colocar una antena de 7 metros en lo alto de un edificio. Observas el extremo superior de la antena con un ángulo de 85^{o}, mientras que su base la observamos con 80^{o}. Calcular la altura del edificio y la distancia que te separa de él.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 85^{\mathrm{o}} = \frac{x+7}{y} \\ \tan 80^{\mathrm{o}} = \frac{x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 6,89 \\ y = 1,21 \end{array}\right.$$

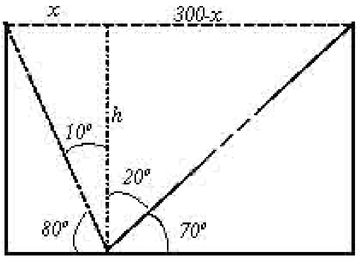


Problema 120 Resolver un triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus lados $a = 10$, $b = 16$ y uno de sus ángulos $C = 105^o$, que no es el opuesto a ninguno de estos lados.
Solución:



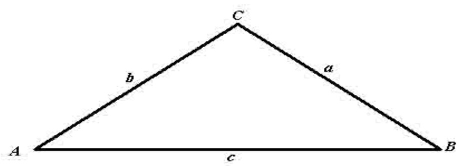
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longrightarrow c = 20,498$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Longrightarrow A = 27^o27'30''$$
$$B = 180^o - (A + C) = 47^o32'30''$$
$$S = \sqrt{46,9(46,9-10)(46,9-16)(46,9-20,498)} = 77,274$$

Problema 121 Desde el fondo de un desfiladero observamos a Isaac en su nuevo entretenimiento, el de equilibrista. Tratará de cruzar el desfiladero por todo lo alto. Le observamos desde abajo con un poco de pesimismo. Podemos ver un extremo de la cuerda con un ángulo de 80^o y el otro con un ángulo de 70^o. Si sabemos que el desfiladero tiene 300 metros de ancho calcular a que altura se encuentra nuestro amigo.
Solución:



$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 10^{o} = \frac{x}{h} \\ \\ \tan 20^{o} = \frac{300-x}{h} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} [x = 97,90554642\, m \\ h = 555,2499477\, m \end{array} \right.$$

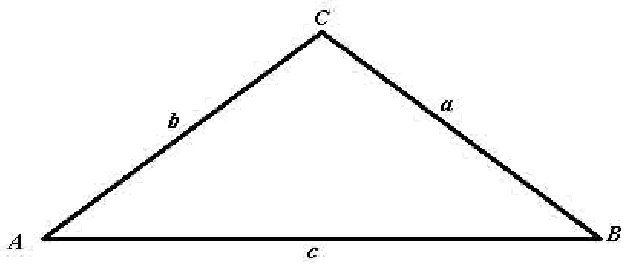
Problema 122 A dos puertos, separados longitudinalmente por 20 Km, se reciben a la vez señales de socorro de un barco que se encuentra en alta mar. El puerto A recibe la señal con un ángulo de 75^{o} mientras que el B lo recibe con un ángulo de 60^{o}. También se sabe que el barco está entre los dos puertos, pero pérdido dentro del mar, y se pide calcular a que distacia se encuentra de ellos.
Solución:



$$C = 180^{o} - (75^{o} + 60^{o}) = 45^{o}$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow a = \frac{20 \sin 75^{o}}{\sin 45^{o}} = 27,32\, Km$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow b = \frac{20 \sin 60^{o}}{\sin 45^{o}} = 24,49\, Km$$

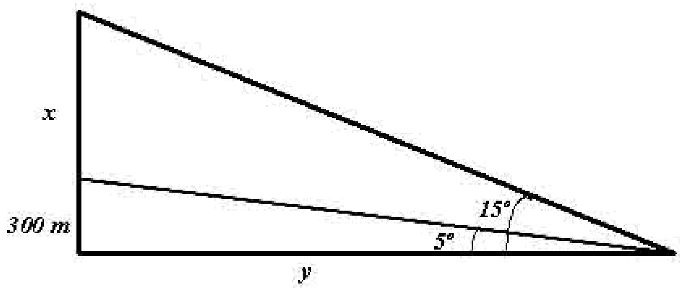
Problema 123 Resolver un triángulo no rectángulo del que conocemos dos de sus lados $a = 16$, $c = 9$ y uno de sus ángulos $B = 115^{o}$, que no es el opuesto a ninguno de estos lados.

Solución:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Longrightarrow c = 21,417$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow A = 22^o23'10''$$
$$C = 180^o - (A + B) = 42^o36'50''$$
$$S = \sqrt{23,21(23,21-16)(23,21-9)(23,21-21,417)} = 65,24$$

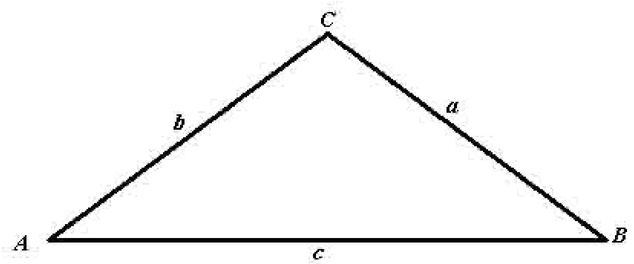
Problema 124 Un paracaidista de acrobacias en una exhibición sabe que, en su caida libre desde el avión tiene que abrir el paracaídas cuando su altímetro le indique que le quedan 300 m. para llegar al suelo. Suponemos que en el momento que se lanza el avión se encuentra en suspensión (sin movimiento) y lo observamos con un ángulo de 15°, cuando abre el paracaídas le vemos con un ángulo de 5°. Se pide calcular la altura desde la que se ha lanzado y la distancia que recorreremos para encontrarnos con él.
Solución:



$$\left\{\begin{array}{l} \tan 5^o = \frac{300}{y} \\ \\ \tan 15^o = \frac{300+x}{y} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 618,8\,m \\ y = 3{,}429\,m \end{array}\right.$$

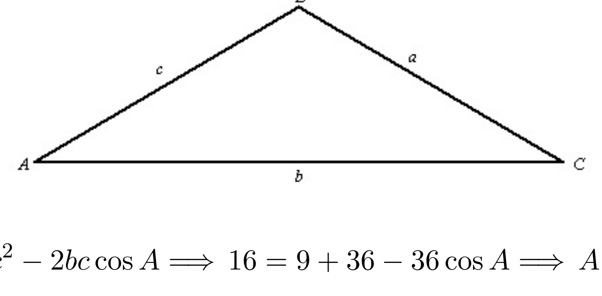
Problema 125 Dos destructores detectan un submarino, que se encuentra sumergido en la línea que separa a ambos, y que es de 5 Km. Uno de ellos lo detecta con un ángulo de 35º y el otro de 20º. Los tres se encuentran parados y preparan sus torpedos, tan sólo les queda calcular la distacia hasta su enemigo, el primero que la calcule será el que sobrevirá. Se pide que las calcules.

Solución:



$$C = 180^{\circ} - (20^{\circ} + 35^{\circ}) = 125^{\circ}$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow a = \frac{5 \sin 20^{\circ}}{\sin 125^{\circ}} = 2,0876\, Km$$
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow b = \frac{5 \sin 35^{\circ}}{\sin 125^{\circ}} = 3,5010\, Km$$

Problema 126 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen sus tres lados: $a = 4$ cm, $b = 3$ cm y $c = 6$ cm.
Solución:



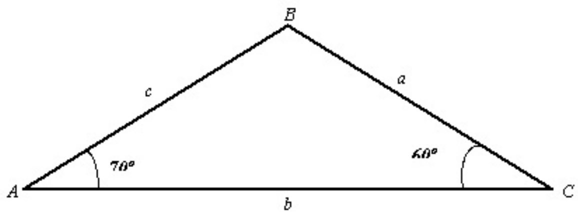
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Longrightarrow 16 = 9 + 36 - 36 \cos A \Longrightarrow A = 36^{\circ}20'10''$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos A \Longrightarrow 9 = 16 + 36 - 48 \cos B \Longrightarrow B = 26^{\circ}23'3''$$

$$C = 180^{\circ} - (A + B) = 117^{\circ}16'47''$$

$$p = \frac{13}{2} \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 5,333\, u^2$$

Problema 127 Dos barcos pesqueros que se encuentran faenando y separados por una distancia de 100 Km empiezan a recibir una señal de socorro. Rápidamente se ponen en contacto los capitanes de ambos barcos para situar el origen de la señal, para ello trazan una línea entre ambos, y sobre esa línea uno de ellos recibe la señal con un ángulo de 70°, mientras que el otro la recibe con un ángulo de 60°. Calcula las distancias que separan a estos dos barcos del origen de la señal.

Solución:

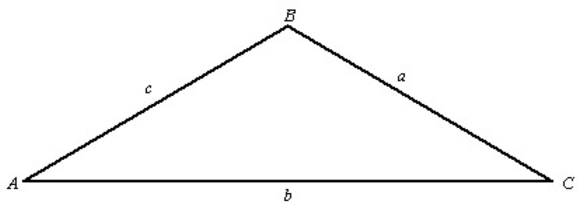


$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 180^{\circ} - 130^{\circ} = 50^{\circ}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{a}{\sin 70^{\circ}} = \frac{100}{\sin 50^{\circ}} \Longrightarrow a = 122,668\,\mathrm{Km}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{c}{\sin 60^{\circ}} = \frac{100}{\sin 50^{\circ}} \Longrightarrow a = 113,052\,\mathrm{Km}$$

Problema 128 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen sus tres lados: $a = 10$ cm, $b = 4$ cm y $C = 35^{\circ}$



Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 100 + 16 - 80\cos 35^{\circ} = 7,104\, cm$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow \frac{7,104}{\sin 35^o} = \frac{10}{\sin A} \Longrightarrow A = 53^o50'33''$$

La calculadora nos dá como resultado $A = 53^o50'33''$, pero este resultado no es válido dado que, el ángulo A tiene que ser obtuso, lo que corresponde al ángulo $180^o - 53^o50'33'' = 126^o9'27''$

$$B = 180^o - (A + C) = 18^o50'33''$$

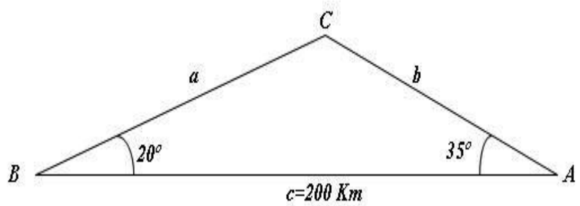
$$S\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11,63\ cm^2$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Problema 129 Dos aeropuertos A y B reciben la señal de un avión, que está pidiendo un aterrizaje forzoso por la averia de uno de sus motores. El aeropuerto A recibe la señal con un ángulo de 35^o y el B con 20^o, ambos medidos con la horizontal. Si los aeropuertos están separados por una distancia de 200 Km, calcular la distancia desde cada aeropuerto al avión.

Solución:

$$C = 180^o - (35^o + 20^o) = 125^o$$



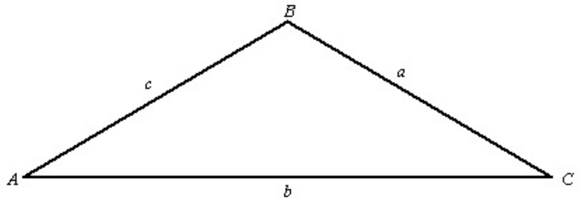
$$\frac{200}{\sin 125^o} = \frac{a}{\sin 35^o} \Longrightarrow a = 140,0415\, Km$$
$$\frac{200}{\sin 125^o} = \frac{b}{\sin 20^o} \Longrightarrow b = 83,5059\, Km$$

Problema 130 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 4$ cm, $b = 6$ cm y $C = 40^o$.

Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 16 + 36 - 48\cos 40^o \Longrightarrow c = 3,9\ cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A \Longrightarrow 16 = 36 + 15,21 - 46,8\cos A \Longrightarrow A = 41^o12'20''$$

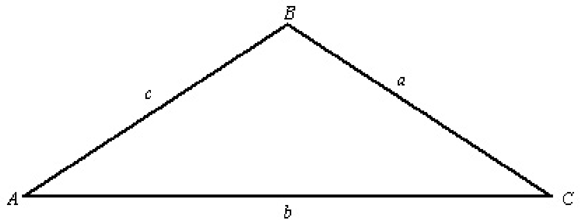


$$B = 180^o - (A + C) = 98^o 47' 40''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 6,95 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 7,70\, cm^2$$

Problema 131 Dos amigos aficionados a la astronomía y, que se encuentran separados por una distancia de 1000 Km, están observando un foco de luz que, por una causa desconocida había aparecido en el firmamento en medio de las estrellas. Ese objeto luminoso se confunde con lo que sería una nueva estrella desconocida, por lo que deciden investigar. Uno de ellos apunta con su telescopio bajo un ángulo de 85º, mientras que el otro lo hace con un ángulo de 87º. Calcular la distancia de cada uno de ellos al objeto en cuestión. ¿Se tratará de una estrella?

Solución:



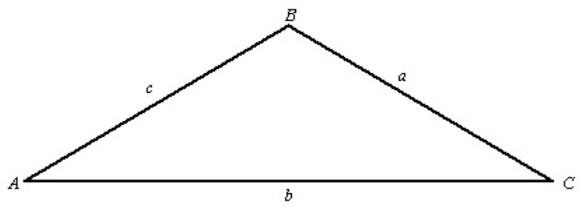
$$B = 180^o - (A + C) = 180^o - 172^o = 8^o$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{a}{\sin 85^o} = \frac{1000}{\sin 8^o} \Longrightarrow a = 7157,95\, \mathrm{Km}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{c}{\sin 87^o} = \frac{1000}{\sin 8^o} \Longrightarrow c = 7175,45\, \mathrm{Km}$$

Está claro de que no es una estrella.

Problema 132 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm y $C = 40^o$.



Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 25 + 16 - 40\cos 40^{\text{o}} \Longrightarrow c = 3,22\ cm$$

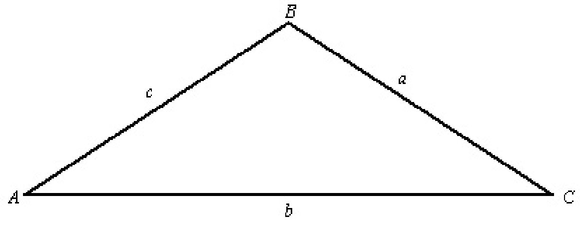
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A \Longrightarrow 25 = 16 + 10,36 - 25,76\cos A \Longrightarrow A = 87^{\text{o}}34'46''$$

$$B = 180^{\text{o}} - (A + C) = 52^{\text{o}}25'14''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 6,11 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 6,43\,cm^2$$

Problema 133 Dos amigos aficionados a la arqueología se encuentrar a bordo de un pequeño submarino para investigar un galeotote undido en el mar Mediterraneo. Se sumergieron con un ángulo de 15º sobre la horizontal, estubieron trabajando en el fondo, y empezaron el ascenso con un ángulo de 23º. Cuando salieron a la superficie estaban a 10 Km del lugar donde iniciaron la inmersión. Calcular los Kms que han recorrido tanto de descenso como de ascenso.

Solución:



$$B = 180^{\text{o}} - (A + C) = 180^{\text{o}} - 38^{\text{o}} = 142^{\text{o}}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{a}{\sin 23^{\text{o}}} = \frac{10}{\sin 142^{\text{o}}} \Longrightarrow a = 6,3465\,\text{Km}$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{c}{\sin 15^{\text{o}}} = \frac{10}{\sin 142^{\text{o}}} \Longrightarrow c = 4,2039\,\text{Km}$$

Problema 134 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 10$ cm, $b = 4$ cm y $C = 35^o$.

Solución:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 100 + 16 - 80\cos 35^o = 7,104\, cm$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Longrightarrow \cos A = -0,59 \Longrightarrow A = 126^o 15' 16''$$

Otra manera:

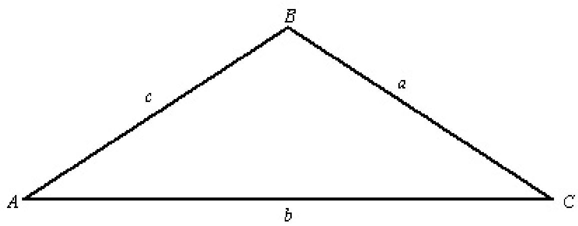
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Longrightarrow \frac{7,104}{\sin 35^o} = \frac{10}{\sin A} \Longrightarrow A = 53^o 50' 33''$$

La calculadora nos da como resultado $A = 53^o 50' 33''$, pero este resultado no es válido dado que, el ángulo A tiene que ser obtuso, lo que corresponde al ángulo $180^o - 53^o 50' 33'' = 126^o 9' 27''$

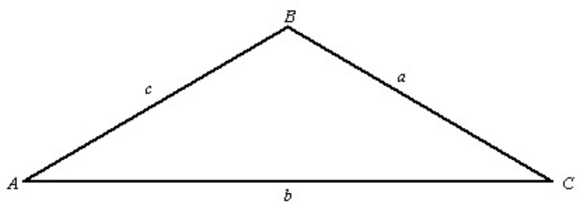
$$B = 180^o - (A + C) = 18^o 49' 43''$$

$$S\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 11,63\ cm^2$$

donde $p = \dfrac{a+b+c}{2}$



Problema 135 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 15$ cm, $b = 33$ cm y $C = 28^o$.



Solución:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 15^2+33^2-2\cdot15\cdot33\cdot\cos 28^o \Longrightarrow c = 20,97\ cm$$

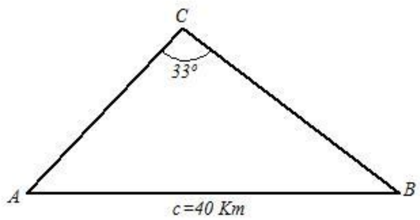
$$a^2 = b^2+c^2-2ab\cos A \Longrightarrow 15^2 = 33^2+20,97^2-2\cdot33\cdot20,97\cos A \Longrightarrow A = 19^o36'38''$$

$$B = 180^o - (A+C) = 132^o23'22''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 34,485 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 116,128\,cm^2$$

Problema 136 Un barco observa la luz de dos faros de la costa, que se encuentran separados por una distancia de 40 Km, y las luces inciden en dicho barco con un ángulo de 33º. El capitán sabe que se encuentra a 50 Km del faro más cercano. Se pide, calcular la distancia desde el barco al otro faro y los ángulos del triángulo formado.

Solución:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Longrightarrow \frac{40}{\sin 33^o} = \frac{50}{\sin A} \Longrightarrow A = 42^o54'22''$$

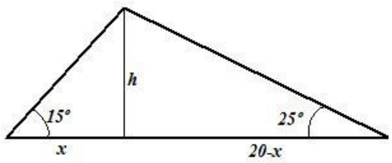
$$B = 180^o - (75^o54'22'') = 104^o5'38''$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Longrightarrow \frac{40}{\sin 33^o} = \frac{b}{\sin 104^o5'38''} \Longrightarrow c = 71,232\,\text{Km}$$

Problema 137 En una llanura inmensa, Esteban y Mario se encuentran separados por una distancia de 20 Km. La aparición de un OVNI suspendido en el aire en la dirección que los separa les sorprende de forma asombrosa. Se comunican por sus teléfonos móviles la siguiente información: Esteban observa el artefacto bajo un ángulo de 15 º y Mario lo observa con un ángulo de 25º. ¿A qué altura se encuentra el OVNI?

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan 15^o = \frac{h}{x} \\ \tan 25^o = \frac{h}{20-x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 12,698\,\text{Km} \\ h = 3,4\,\text{Km} \end{array}\right.$$



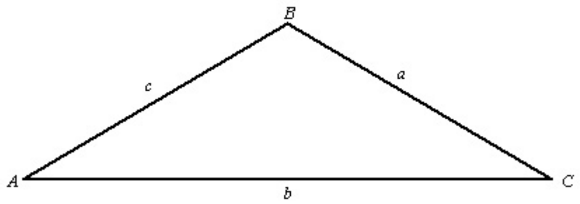
Problema 138 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 11$ cm, $b = 23$ cm y $C = 31^{\circ}$.
Solución:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 11^2+23^2-2\cdot 11\cdot 23\cdot \cos 31^{\circ} \Longrightarrow c = 14,7\ cm$$

$$a^2 = b^2+c^2-2ab\cos A \Longrightarrow 11^2 = 23^2+14,7^2-2\cdot 23\cdot 14,7\cos A \Longrightarrow A = 22^{\circ}38'27''$$

$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 126^{\circ}21'33''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 24,35 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 65,08\, cm^2$$



Problema 139 Los alumnos de 1º de Bachillerato, del colegio Villaeuropa de Móstoles, se encuentran de excursión por Aranjuez, donde han ido a montar en globo aerostático.

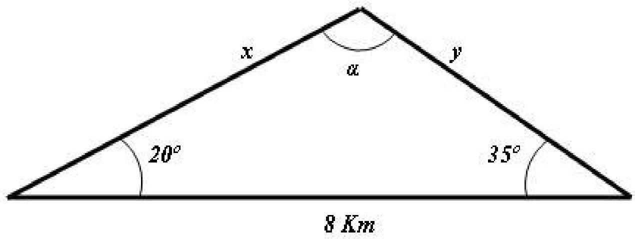
Se encuentran en una llanura enorme. Luis acaba de descender del globo y observa a Tania con unos anteojos, que está subiendo en otro globo en ese momento; por la lectura de su aparato de observación sabe que entre ellos dos hay una distancia de 8 Km. Otro globo se encuentra en el aire, circulando entre ellos dos rectilíneamente, en él van Cintia y Cristina. Luis lo ve bajo un ángulo 20º y Tania con un ángulo de 35º.

¿Qué distancia hay desde el globo hasta Tania y hasta Luis?

Solución:

$$\alpha = 180^{\circ} - 55^{\circ} = 125^{\circ}$$

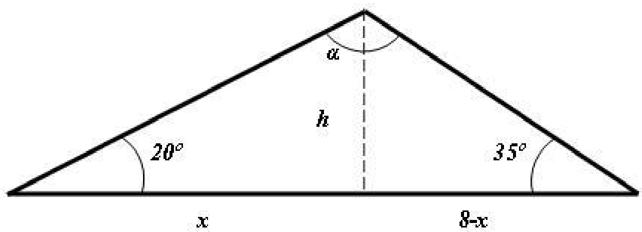
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



$$\frac{8}{\sin 125^{\circ}} = \frac{x}{\sin 35^{\circ}} \Longrightarrow x = 5,6\,\text{Km}$$
$$\frac{8}{\sin 125^{\circ}} = \frac{y}{\sin 20^{\circ}} \Longrightarrow y = 3,34\,\text{Km}$$

Problema 140 Si seguimos con el enunciado del problema anterior resulta que en un cierto momento el globo cae verticalmente, pero con suavidad, hasta llegar al suelo, debido a un problema técnico. Calcular la altura a la que volaba el globo, y la distacia a la que se encuentra el globo de Luis y de Tania, después de ese aterrizaje forzoso.

Solución:



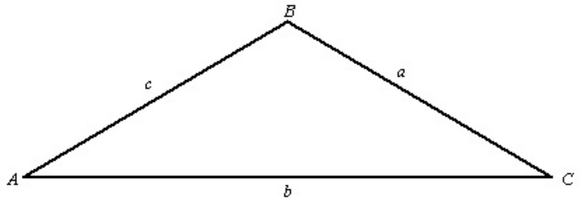
$$\left\{\begin{array}{l} \tan 35^{\circ} = \frac{h}{8-x} \\ \tan 20^{\circ} = \frac{h}{x} \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5,25\,\text{Km de Luis o } 2,74\,\text{Km de Tania} \\ h = 1,91\,\text{Km} \end{array}\right.$$

Problema 141 Resolver un triángulo no rectángulo del que se conocen: $a = 12$ cm, $b = 25$ cm y $C = 36^{\circ}$.

Solución:

$$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \Longrightarrow c^2 = 12^2+25^2-2\cdot 12\cdot 25\cdot \cos 36^{\circ} \Longrightarrow c = 16,84\ cm$$

$$a^2 = b^2+c^2-2ab\cos A \Longrightarrow 12^2 = 25^2+16,84^2-2\cdot 25\cdot 16,84\cos A \Longrightarrow A = 24^{\circ}45'42''$$

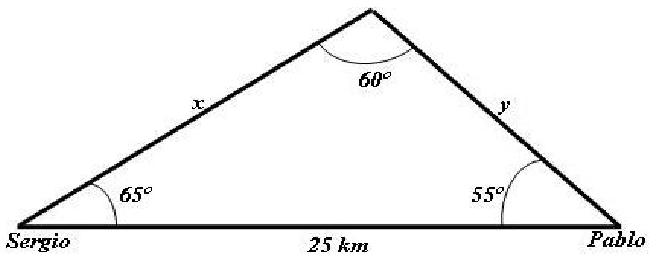


$$B = 180^o - (A + C) = 119^o 14' 18''$$

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 26,92 \Longrightarrow S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 88,166\, cm^2$$

Problema 142 El primer día de clase después de unas vacaciones los alumnos de 1^o de Bachillerato se cuentan sus aventuras vacacionales. Entre estas historias hay alguna muy poco creìble, pero hay que demostrarlo. La más sorprendente fue la de los náufragos: Sergio y Pablo se encuentran separados por una distancia rectilínea de 25 Km en medio del mar. Están alojados en balsas salvavidas. La suerte se ha aliado con ellos y han sido avistados por una avioneta que, en estos momentos, se encuentra entre ellos y en esa línea recta. Sergio observa la avioneta con un ángulo de 65^o mientras que Pablo la ve bajo un ángulo de 55^o. Para analizar la situación se pide calcular la distancia que, en ese momento, hay desde cada uno de ellos a la avioneta.

Solución:



$$\alpha = 180^o - 120^o = 60^o$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

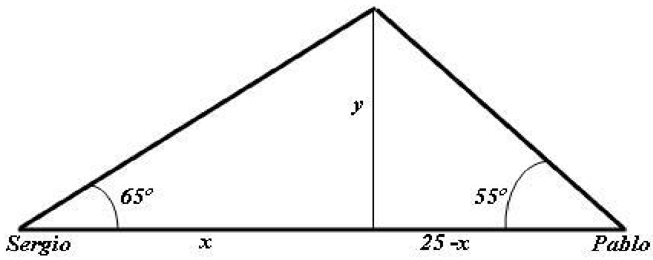
$$\frac{25}{\sin 60^o} = \frac{x}{\sin 55^o} \Longrightarrow x = 23,64\,\text{Km}$$

$$\frac{25}{\sin 60^o} = \frac{y}{\sin 65^o} \Longrightarrow y = 26,16\,\text{Km}$$

Problema 143 Seguimos con el enunciado del problema anterior y no tenemos en cuenta sus resultados. En un cierto momento la avioneta suelta un paquete de supervivencia (el único que lleva) que suponemos cae verticalmente entre estos dos alumnos. Para analizar la situación se pide calcular la altura desde la que la avioneta suelta el objeto y la distancia que tienen que recorrer Sergio y Pablo para llegar al paquete.

Con los datos obtenidos debemos preguntarnos: ¿Nos han contado una trola?

Solución:



$$\left\{\begin{array}{l}\tan 65^{\rm o} = \frac{y}{x}\\ \tan 55^{\rm o} = \frac{y}{25-x}\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x = 9,9916\,\text{Km de Sergio o } 15,0084\,\text{Km de Pablo}\\ y = 21,431\,\text{Km}\end{array}\right.$$

Es una imaginativa trola.