ACTIVIDADES INICIALES

1.I. Realiza las siguientes operaciones.

a) $2 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (2 \cdot 3 - 5) - 1$

b) $-3 + \left[5(2^{-3} - 3) - \left(\sqrt{25} - 8\right)\left(2^2 - \sqrt{4}\right)\right] + 10$

a) $2 - 3 \cdot (-4) + 5 \cdot (2 \cdot 3 - 5) - 1 = 2 + 12 + 5 \cdot (6 - 5) - 1 = 2 + 12 + 5 - 1 = 18$

b) $-3 + \left(5 \cdot (2^{-3} - 3) - \left(\sqrt{25} - 8\right) \cdot \left(2^2 - \sqrt{4}\right)\right) + 10 = -3 + \left(5 \cdot \left(\frac{1}{8} - 3\right) - (5 - 8) \cdot (4 - 2)\right) + 10 =$

$= -3 + \left(5 \cdot \left(-\frac{23}{8}\right) + 6\right) + 10 = -3 - \frac{115}{8} + 6 + 10 = -\frac{11}{8}$

1.II. Simplifica las expresiones siguientes.

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}} \cdot \sqrt{2^2 + 5}}{2 \cdot (-3) - 5}$

b) $\dfrac{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (4^3 - 4^2)^{-1}}{6^{-2}}$

a) $\dfrac{3^{3+\sqrt{9}} \cdot \sqrt{2^2 + 5}}{2 \cdot (-3) - 5} = \dfrac{3^6 \cdot 3}{-6 - 5} = -\dfrac{3^7}{11} = -\dfrac{2187}{11}$

b) $\dfrac{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot (4^3 - 4^2)^{-1}}{6^{-2}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot (3 \cdot 4^2)^{-1}}{6^{-2}} = \dfrac{2^2 \cdot 3^{-1} \cdot 2^{-4}}{2^{-2} \cdot 3^{-2}} = 3$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.1. Resuelve estas operaciones.

a) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}}$

b) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{6}}$

a) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{\frac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} = 1{,}333... = 1{,}\widehat{3}$

b) $\dfrac{2}{1 + \frac{1}{6}} = \dfrac{2}{\frac{7}{6}} = \dfrac{12}{7} = 1{,}\widehat{714285}$

1.2. Halla la fracción irreducible que corresponde a los siguientes números racionales.

a) $25{,}25$ b) $25{,}\widehat{25}$ c) $25{,}2\widehat{5}$

a) $25{,}25 = \dfrac{2525}{100} = \dfrac{101}{4}$

b) $N = 25{,}\widehat{25} = 25{,}252525... \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525{,}252525... \\ N = 25{,}2525225... \end{cases} \Rightarrow 99N = 2500 \Rightarrow N = \dfrac{2500}{99}$

c) $N = 25{,}2\widehat{5} = 25{,}2555... \Rightarrow \begin{cases} 100N = 2525{,}555... \\ 10N = 252{,}555... \end{cases} \Rightarrow 90N = 2273 \Rightarrow N = \dfrac{2273}{90}$

1.3. Calcula la fracción irreducible que representa el resultado de: $25{,}25 + 25{,}\widehat{25} + 25{,}2\widehat{5}$.

$25{,}25 + 25{,}\widehat{25} + 25{,}2\widehat{5} = \dfrac{101}{4} + \dfrac{2500}{99} + \dfrac{2273}{90} = \dfrac{150\,001}{1980}$

1.4. Realiza las siguientes operaciones y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$

b) $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$

a) $\dfrac{15}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}} = \dfrac{15}{1+\dfrac{1}{\frac{3}{2}}} = \dfrac{15}{1+\dfrac{2}{3}} = \dfrac{15}{\frac{5}{3}} = \dfrac{3 \cdot 15}{5} = 9$

b) $\dfrac{14}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}} = \dfrac{14}{1+\dfrac{1}{\frac{4}{3}}} = \dfrac{14}{1+\dfrac{3}{4}} = \dfrac{14}{\frac{7}{4}} = \dfrac{4 \cdot 14}{7} = 8$

1.5. ¿Cuál de estas expresiones no equivale a $a - b + c$?

a) $(a - b) + c$

b) $a - (b + c)$

c) $a + (c - b)$

La expresión del apartado *b*, que equivale a $a - b - c$.

1.6. Razona con ejemplos si son ciertas las siguientes afirmaciones.

a) La suma de dos irracionales es siempre irracional.

b) El producto de dos irracionales es siempre un número irracional.

Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su suma es 0, número racional.
Es falso. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales, y su producto es -2, número racional.

1.7. Se quiere vallar un campo rectangular. Se sabe que uno de sus lados mide tres quintas partes de la medida del otro. Además, la diagonal mide 30 m. Calcula el precio que se deberá pagar por hacer el vallado si cada metro de valla cuesta 25 euros y se desperdicia un 10% del material empleado.

Los lados miden a y $\dfrac{3a}{5}$. Entonces: $D = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{3a}{5}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \dfrac{9a^2}{25}} = \sqrt{\dfrac{34a^2}{25}} = 30 \Rightarrow a = 25{,}725$ m

El perímetro mide $2 \cdot \left(a + \dfrac{3a}{5}\right) = 82{,}32$ m.

La valla costaría $82{,}32 \cdot 25 = 2058$ euros; pero como se desperdicia el 10% del material, esta cantidad representa el 90% del precio total. Habría que comprar por un valor de $2058 : 0{,}90 = 2286{,}67$ euros.

1.8. Ordena de menor a mayor en cada caso.

a) $\dfrac{11}{4}, \dfrac{68}{25}, \dfrac{14}{5}$ y $\dfrac{27}{10}$

b) $1{,}23$, $1{,}2\widehat{3}$ y $1{,}\widehat{23}$

c) $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[3]{3}$ y $\sqrt{2}$

d) $2{,}\widehat{9}$, 3 y $3{,}0\widehat{1}$

a) $\dfrac{11}{4} = \dfrac{275}{100}$; $\dfrac{68}{25} = \dfrac{272}{100}$; $\dfrac{14}{5} = \dfrac{280}{100}$ y $\dfrac{27}{10} = \dfrac{270}{100} \Rightarrow \dfrac{27}{10} < \dfrac{68}{25} < \dfrac{11}{4} < \dfrac{14}{5}$

b) $1{,}23 < 1{,}232323\ldots < 1{,}2333\ldots \Rightarrow 1{,}23 < 1{,}\widehat{23} < 1{,}2\widehat{3}$

c) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, $\sqrt[3]{3} = 1{,}4422\ldots \Rightarrow \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

d) $2{,}99\ldots < 3 < 3{,}011\ldots \Rightarrow 2{,}\widehat{9} < 3 < 3{,}0\widehat{1}$

1.9. Sean a y b dos números reales negativos. Si $a \leqslant b$, demuestra que el inverso de a es mayor o igual que el inverso de b.

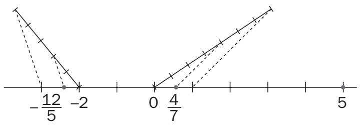
$a \leqslant b \Rightarrow a \cdot \dfrac{1}{a} \leqslant b \cdot \dfrac{1}{a} \Rightarrow 1 \leqslant \dfrac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$

1.10. A partir del desarrollo de $(x - y)^2$, siendo x e y no nulos, demuestra que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$.

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$$

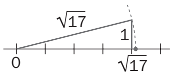
1.11. Representa en la recta real los siguientes números.

a) 5 b) $\frac{4}{7}$ c) -2 d) $-\frac{12}{5}$

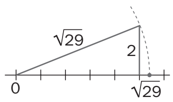


1.12. Escribe los números 17 y 29 como suma de dos cuadrados y representa $\sqrt{17}$ y $\sqrt{29}$ en la recta real.

$17 = 4^2 + 1^2$

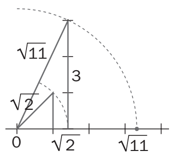


$29 = 5^2 + 2^2$



1.13. Representa en la recta real: $\sqrt{11}$.

$$\sqrt{11} = \sqrt{2 + 9} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{1^2 + 1^2}\right)^2 + 3^2}$$



1.14. Desarrolla el valor de la expresión $2x - 3 + |2x - 3|$ y calcúlala para los casos $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

$$2x - 3 + |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 + 2x - 3 & \text{si } 2x - 3 \geqslant 0 \\ 2x - 3 - (2x - 3) & \text{si } 2x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x - 6 & \text{si } x \geqslant \frac{3}{2} \\ 0 & \text{si } x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Para $x = -1$, el valor de la expresión es 0.

Para $x = 0$, el valor de la expresión es 0.

Para $x = 2$, el valor de la expresión es $4 \cdot 2 - 6 = 2$.

1.15. Desarrolla el valor de las siguientes expresiones.

a) $|x + 2| + |x + 3|$ b) $x + |x + 2| + |x + 3|$

a) $|x + 2| + |x + 3|$. Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = -3$.

$$|x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} -(x + 2) - (x + 3) & \text{si } x \leqslant -3 \\ -(x + 2) + x + 3 & \text{si } -3 < x < -2 \\ x + 2 + x + 3 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases} = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \leqslant -3 \\ 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 2x + 5 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$$

b) $x + |x + 2| + |x + 3|$. Los valores absolutos que intervienen se anulan para $x = -2$ y $x = -3$.

$$x + |x + 2| + |x + 3| = \begin{cases} x - (x + 2) - (x + 3) & \text{si } x \leqslant -3 \\ x - (x + 2) + x + 3 & \text{si } -3 < x < -2 \\ x + x + 2 + x + 3 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases} = \begin{cases} -x - 5 & \text{si } x \leqslant -3 \\ x + 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \geqslant -2 \end{cases}$$

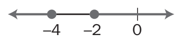
1.16. Dados $A = (2, 4)$, $B = (-2, 6]$ y $C = [-3, +\infty)$, calcula:

a) $A \cup B \cup C$ b) $A \cap B \cap C$ c) $A \cap B \cup C$

a) $A \cup B \cup C = C = [-3, +\infty)$ b) $A \cap B \cap C = (2, 4)$ c) $A \cap B \cup C = C = [-3, +\infty)$

1.17. Expresa mediante intervalos y gráficamente los siguientes conjuntos de números reales.

a) $|x - 2| < 2$ b) $|x + 3| \geqslant 1$ c) $|x + 1| \leqslant 2$

a) $(0, 4)$	
b) $(-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$	
c) $[-3, 1]$	

1.18. Halla los errores absoluto y relativo que se cometen al utilizar 1,7 como aproximación de $\frac{12}{7}$.

Error absoluto: $E_a = \left|\frac{12}{7} - 1{,}7\right| = \frac{1}{70}$ Error relativo: $E_r = \dfrac{\frac{1}{70}}{\frac{12}{7}} = \frac{1}{120}$

1.19. Calcula las mejores aproximaciones por defecto y por exceso y el redondeo de $\sqrt{2}$ a la unidad, la centésima y la diezmilésima.

	Unidad	Centésima	Diezmilésima
Defecto	1	1,41	1,4142
Exceso	2	1,42	1,4143
Redondeo	1	1,41	1,4142

1.20. (TIC) Calcula las siguientes operaciones y da el resultado en notación científica.

a) $0{,}00048 + 0{,}000059$

b) $35000000 - 720000000$

c) $250000 \cdot 5{,}5 \cdot 10^5$

d) $0{,}0000015 : 0{,}000003$

e) $\dfrac{2{,}2 \cdot 10^9 - 7{,}8 \cdot 10^{-14}}{1{,}9 \cdot 10^{11}}$

f) $\dfrac{0{,}00016 \cdot (25 \cdot 10^3 + 2000)}{0{,}0025}$

g) $\dfrac{10^{23} \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-12}}{3{,}5 \cdot 10^{22} + 4{,}3 \cdot 10^{21}}$

a) $5{,}39 \cdot 10^{-4}$

b) $-6{,}85 \cdot 10^8$

c) $1{,}375 \cdot 10^{11}$

d) $5 \cdot 10^{-1}$

e) $1{,}158 \cdot 10^{-2}$

f) $1{,}728 \cdot 10^3$

g) $1{,}425 \cdot 10^{-11}$

1.21. Un átomo de hidrógeno (H) pesa $1{,}66 \cdot 10^{-24}$ gramos.

a) ¿Cuántos átomos de H se necesitan para obtener 20 kg de ese gas?

b) ¿Cuál es la masa de $2{,}524 \cdot 10^{26}$ átomos de H?

c) Si 2 gramos de hidrógeno molecular ocupan un volumen de 22,4 L a 0 °C y a la presión atmosférica normal, ¿cuántas moléculas de hidrógeno contendría un recipiente de 5 L en estas condiciones?

a) $\dfrac{20\,000}{1{,}66 \cdot 10^{-24}} = 1{,}205 \cdot 10^{28}$ átomos serán necesarios para juntar una masa de 20 kg.

b) $2{,}524 \cdot 10^{26} \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-24} = 419$ g $= 0{,}419$ kg

c) El recipiente de 5 litros contiene $\dfrac{2 \cdot 5}{22{,}4}$ gramos de hidrógeno, es decir, $\dfrac{2 \cdot 5}{22{,}4} : (1{,}66 \cdot 10^{-24}) = 2{,}689 \cdot 10^{23}$ átomos de hidrógeno. Cada molécula está compuesta por dos átomos, por lo que habrá $1{,}345 \cdot 10^{23}$ moléculas en total.

1.22. La masa de la Tierra es de $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg, y la de Plutón, de $1{,}29 \cdot 10^{22}$.

a) ¿Cuántas veces es más masiva la Tierra que Plutón?

b) Suponiendo que ambos planetas fueran esferas perfectas con radios de 6371 y 1160 km, respectivamente, calcula la densidad aproximada de cada uno de ellos.

a) $\dfrac{5{,}97 \cdot 10^{24}}{1{,}29 \cdot 10^{22}} = 463$ veces mayor es la masa de la Tierra respecto de la de Plutón.

b) Densidad de la Tierra $= \dfrac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \dfrac{5{,}97 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 6371^3\ \text{km}^3} = 5{,}5 \cdot 10^{12}\ \text{kg/km}^3 = \dfrac{5{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 1000}{10^{15}} = 5{,}5\ \text{g/cm}^3$

Densidad de Plutón $= \dfrac{\text{Masa}}{\text{Volumen}} = \dfrac{1{,}29 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{\frac{4}{3}\pi \cdot 1160^3\ \text{km}^3} = 1{,}97 \cdot 10^{12}\ \text{kg/km}^3 = 1{,}97\ \text{g/cm}^3$

1.23. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{6}$ b) $\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{8} - \dfrac{1}{4}\sqrt{18}$ c) $\dfrac{16 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{\sqrt[3]{32}}}$ d) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{20} + \sqrt{5}}}}$

a) $\sqrt{\dfrac{3}{2}} + \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} + \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \sqrt{6} = \dfrac{3}{2}\sqrt{6}$

b) $\sqrt{2} + \dfrac{3}{2}\sqrt{8} - \dfrac{1}{4}\sqrt{18} = \sqrt{2} + \dfrac{3 \cdot 2}{2}\sqrt{2} - \dfrac{3}{4}\sqrt{2} = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \dfrac{3}{4}\sqrt{2} = \dfrac{13}{4}\sqrt{2}$

c) $\dfrac{16 \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{\sqrt[3]{32}}} = \dfrac{2^4 \cdot \sqrt[3]{2^2} \cdot 2\sqrt{2}}{\sqrt[6]{2^5}} = \dfrac{2^5 \cdot \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^5}} = 2^5 \cdot \sqrt[6]{2^2} = 2^5 \cdot \sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{\sqrt{20} + \sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{5} + \sqrt{5}}}} = \sqrt{\sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}}} = \sqrt[4]{\sqrt{\dfrac{2}{5}}} = \sqrt[8]{\dfrac{2}{5}} = \dfrac{\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[8]{5^7}}{\sqrt[8]{5} \cdot \sqrt[8]{5^7}} = \dfrac{\sqrt[8]{2 \cdot 5^7}}{5}$

1.24. Opera y simplifica las siguientes expresiones.

a) $128^{\frac{1}{2}} + 162^{\frac{3}{2}}$ b) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

a) $128^{\frac{1}{2}} + 162^{\frac{3}{2}} = \sqrt{128} + \sqrt{162^3} = \sqrt{2^7} + \sqrt{2^3 \cdot 3^{12}} = 2^3\sqrt{2} + 2 \cdot 3^6\sqrt{2} = 8\sqrt{2} + 1458\sqrt{2} = 1466\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^7}}} = \sqrt[8]{2^7}$

1.25. Racionaliza los siguientes denominadores.

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}}$ b) $\dfrac{5}{2\sqrt[4]{5}}$ c) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}+1}$

a) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{10} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{5}{2\sqrt[4]{5}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{2\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{5^3}} = \dfrac{5 \cdot \sqrt[4]{5^3}}{2 \cdot 5} = \dfrac{\sqrt[4]{5^3}}{2}$

c) $\dfrac{5}{2\sqrt{5}+1} = \dfrac{5(2\sqrt{5}-1)}{(2\sqrt{5}+1)(2\sqrt{5}-1)} = \dfrac{10\sqrt{5}-5}{(2\sqrt{5})^2-1^2} = \dfrac{10\sqrt{5}-5}{4 \cdot 5 - 1} = \dfrac{10\sqrt{5}-5}{19}$

1.26. Simplifica la expresión $\dfrac{\left[\binom{29}{3}+\binom{29}{25}\right] \cdot 4!}{630}$.

$$\frac{\left[\binom{29}{3}+\binom{29}{25}\right] \cdot 4!}{630} = \frac{\left[\binom{29}{3}+\binom{29}{4}\right] \cdot 4!}{630} = \frac{\binom{30}{4} \cdot 4!}{630} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{630} = 1044$$

1.27. (TIC) Desarrolla las siguientes potencias.

a) $(3-2\sqrt{3})^5$ b) $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^4$

a) $(3-2\sqrt{3})^5 = \binom{5}{0} \cdot 3^5 - \binom{5}{1} \cdot 3^4 \cdot (2\sqrt{3}) + \binom{5}{2} \cdot 3^3 \cdot (2\sqrt{3})^2 - \binom{5}{3} \cdot 3^2 \cdot (2\sqrt{3})^3 + \binom{5}{4} \cdot 3 \cdot (2\sqrt{3})^4 - \binom{5}{5} \cdot (2\sqrt{3})^5 =$

$= 243 - 5 \cdot 81 \cdot 2\sqrt{3} + 10 \cdot 27 \cdot 12 - 10 \cdot 9 \cdot 24\sqrt{3} + 5 \cdot 3 \cdot 144 - 32 \cdot 9\sqrt{3} = 5643 - 3258\sqrt{3}$

b) $\left(2x+\dfrac{4}{3x}\right)^4 = \binom{4}{0} \cdot (2x)^4 + \binom{4}{1} \cdot (2x)^3 \cdot \dfrac{4}{3x} + \binom{4}{2} \cdot (2x)^2 \cdot \left(\dfrac{4}{3x}\right)^2 + \binom{4}{3} \cdot 2x \cdot \left(\dfrac{4}{3x}\right)^3 + \binom{4}{4} \cdot \left(\dfrac{4}{3x}\right)^4 =$

$= 16x^4 + 4 \cdot 8x^3 \cdot \dfrac{4}{3x} + 6 \cdot 4x^2 \cdot \dfrac{16}{9x^2} + 4 \cdot 2x \cdot \dfrac{64}{27x^3} + \dfrac{256}{81x^4} = 16x^4 + \dfrac{128}{3}x^2 + \dfrac{128}{3} + \dfrac{512}{27x^2} + \dfrac{256}{81x^4}$

1.28. Halla el sexto término de los desarrollos de:

a) $(\sqrt{2}+2\sqrt{8})^9$ b) $(3a^2+2ab)^8$

a) $T_6 = \binom{9}{5} \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (2\sqrt{8})^5 = 126 \cdot 4 \cdot 4096\sqrt{2} = 2\,064\,384\sqrt{2}$

b) $T_6 = \binom{8}{5} \cdot (3a^2)^3 \cdot (2ab)^5 = 56 \cdot 27a^6 \cdot 32a^5b^5 = 48\,384a^{11}b^5$

1.29. Calcula el término independiente del desarrollo de la potencia $\left(\dfrac{3}{x^2}+5x\right)^{12}$.

$T_k = \binom{12}{k-1} \cdot \left(\dfrac{3}{x^2}\right)^{13-k} \cdot (5x)^{k-1} = \binom{12}{k-1} \cdot \dfrac{3^{13-k} \cdot 5^{k-1} \cdot x^{k-1}}{x^{26-2k}} = \binom{12}{k-1} 3^{13-k} \cdot 5^{k-1} \cdot x^{3k-27}$

$3k - 27 = 0 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow T_9 = \binom{12}{8} 3^{13-9} \cdot 5^{9-1} = 495 \cdot 3^4 \cdot 5^8$

1.30. Calcula: $\log_2 16$, $\log_3 \sqrt{27}$ y $\log_5 \sqrt[3]{25}$.

$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

$\log_3 \sqrt{27} = \log_3 \sqrt{3^3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

$\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 \sqrt[3]{5^2} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$

1.31. Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y que $\log 3 \approx 0{,}477$, halla:

a) $\log_3 8$ b) $\log \sqrt{0{,}012}$

a) $\log_3 8 = \dfrac{\log 8}{\log 3} = \dfrac{\log 2^3}{\log 3} = \dfrac{3\log 2}{\log 3} \approx 1{,}893$

b) $\log \sqrt{0{,}012} = \log \sqrt{\dfrac{12}{1000}} = \log\left(\dfrac{12}{1000}\right)^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{12}{1000} = \dfrac{1}{2}(\log 12 - \log 1000) = \dfrac{1}{2}(\log(2^2 \cdot 3) - 3) =$

$= \dfrac{1}{2}(2\log 2 + \log 3 - 3) \approx -0{,}9605$

1.32. Toma logaritmos en la expresión $A = (x^x)^x$.

$\log A = \log\left[(x^x)^x\right] = x\log(x^x) = x \cdot x\log x = x^2\log x$

1.33. Pasa a forma algebraica la siguiente expresión logarítmica.

$\log A = 2 + 2\log x - \log y$

$\log A = \log 100 + \log x^2 - \log y \Rightarrow \log A = \log\dfrac{100x^2}{y} \Rightarrow A = \dfrac{100x^2}{y}$

1.34. (TIC) Halla el valor de los siguientes logaritmos con la calculadora.

a) $\log_3 21$ b) $\log_{0{,}01} 12$ c) $\log_{\sqrt{3}} 19$

a) $\log_3 21 = \dfrac{\ln 21}{\ln 3} = 2{,}771$ b) $\log_{0{,}01} 12 = \dfrac{\ln 12}{\ln 0{,}01} = -0{,}540$ c) $\log_{\sqrt{3}} 19 = \dfrac{\ln 19}{\ln\sqrt{3}} = 5{,}360$

1.35. En un cultivo de bacterias, el número se duplica cada dos días. Un día se contabilizan 3000 bacterias.

a) Calcula el número de bacterias que habrá 15 días después.

b) ¿Cuántos días han de pasar para que haya el triple de bacterias?

c) Si el número inicial fuera de 6000, ¿cuántos días tendrían que transcurrir para que hubiera el triple?

d) Se supone que la población se estabiliza al alcanzar las 20 000 bacterias. ¿Cuánto tiempo ha de pasar para ello?

El número de bacterias cuando han pasado t días es $N = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

a) Para $t = 15 \Rightarrow N = 3000 \cdot 2^{7{,}5} = 543\,058$

b) $3N = N \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 3 \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log 3 \Rightarrow \dfrac{t}{2}\log 2 = \log 3 \Rightarrow t = 2 \cdot \dfrac{\log 3}{\log 2} = 3{,}17$ días

c) El resultado anterior es independiente del número inicial de bacterias.

d) $20\,000 = 3000 \cdot 2^{\frac{t}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}} = \dfrac{20\,000}{3000} \Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}} = \log\dfrac{20}{3} \Rightarrow \dfrac{t}{2}\log 2 = \log\dfrac{20}{3} \Rightarrow t = 2 \cdot \dfrac{\log\frac{20}{3}}{\log 2} = 5{,}47$ días

1.36. Cierta sustancia radiactiva tiene un período de semidesintegración de 1600 años. Calcula la cantidad de masa a la que se habrá reducido 1 kilogramo de esta sustancia al cabo de 10 000 años.

La masa al cabo de 10 000 años será: $1 \cdot 0{,}5^{\frac{10000}{1600}} = 0{,}01314$ kg $= 13{,}14$ g

1.37. Se depositan en un banco 5000 euros durante 2 años. El banco informa de que el interés es del 3,5% anual.

a) Calcula el capital acumulado suponiendo que la capitalización es anual.

b) ¿A cuánto asciende si es mensual?

c) ¿Y si es diaria?

d) Interpreta los resultados obtenidos.

a) $C = 5000 \cdot 1{,}035^2 = 5356$ €

b) $C = 5000 \cdot \left(1 + \dfrac{3{,}5}{1200}\right)^{2 \cdot 12} = 5362$ €

c) $C = 5000 \cdot \left(1 + \dfrac{3{,}5}{36\,500}\right)^{2 \cdot 365} = 5362{,}5$ €

d) No se aprecian grandes diferencias al cambiar la acumulación anual por la mensual, y son casi insignificantes al cambiarla por acumulación diaria.

EJERCICIOS

Números reales

1.38. Escribe dos números comprendidos entre:

a) $\dfrac{19}{23}$ y $\dfrac{20}{23}$

b) $\dfrac{22}{7}$ y π

a) $\dfrac{19}{23} = \dfrac{57}{69}$ y $\dfrac{20}{23} = \dfrac{60}{69}$. Entre estos dos números están $\dfrac{58}{69}$ y $\dfrac{59}{69}$.

b) $\dfrac{22}{7} = 3{,}1428...$, $\pi = 3{,}1415...$ Entre ambos están 3,1416 y 3,1417.

1.39. Clasifica los siguientes números en racionales e irracionales. En el caso de los racionales, indica su expresión mediante una fracción irreducible.

a) 12,12131415…

b) 12,121212…

c) 12,0121212…

d) 1,010010001…

e) 1,123123123…

f) 0,001002003004…

a) 12,12131415… Irracional

b) $12{,}121212\ldots = 12{,}\widehat{12}$ Racional $\begin{cases} 100N = 1212{,}1212... \\ N = 12{,}121212... \end{cases} \Rightarrow 99N = 1200 \Rightarrow N = \dfrac{1200}{99} = \dfrac{400}{33}$

c) $12{,}0121212\ldots = 12{,}0\widehat{12}$ Racional $\begin{cases} 1000N = 12012{,}1212... \\ 10N = 120{,}121212... \end{cases} \Rightarrow 990N = 11\,892 \Rightarrow N = \dfrac{11\,892}{990} = \dfrac{1982}{165}$

d) 1,010010001 Irracional

e) $1{,}123123123\ldots = 1{,}\widehat{123}$ Racional $\begin{cases} 1000N = 1123{,}123123... \\ N = 1{,}123123... \end{cases} \Rightarrow 999N = 1122 \Rightarrow N = \dfrac{1122}{999} = \dfrac{374}{333}$

f) 0,001002003004 Irracional

1.40. Clasifica estos números indicando a qué conjuntos numéricos pertenecen.

a) 25,0123456… c) -4 e) 2 g) $-\sqrt{0{,}0625}$

b) 25,4252525… d) $\frac{3}{7}$ f) $\sqrt{2{,}3}$ h) $-\frac{65}{13}$

a) 25,0123456… es irracional y real.

b) 25,4252525… es racional y real.

c) -4 es entero, racional y real.

d) $\frac{3}{7}$ es racional y real.

e) 2 es natural, entero, racional y real.

f) $\sqrt{2{,}3}$ es irracional y real.

g) $-\sqrt{0{,}0625} = -0{,}25$ es racional y real.

h) $-\frac{65}{13} = -5$ es entero, racional y real.

1.41. Ordena de menor a mayor estos números.

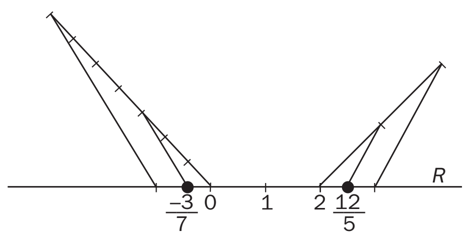
25,0111… $\frac{126}{5}$ 25,01 $\frac{226}{9}$

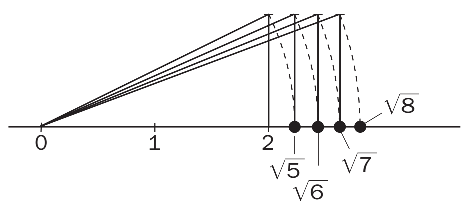
$\frac{126}{5} = 25{,}2$; $\frac{226}{9} = 25{,}1111...$

El orden es: $25{,}01 < 25{,}0111... < \frac{226}{9} < \frac{126}{5}$

1.42. Representa los siguientes números reales.

a) $\frac{12}{5}$ b) $-\frac{3}{7}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$ f) $\sqrt{8}$

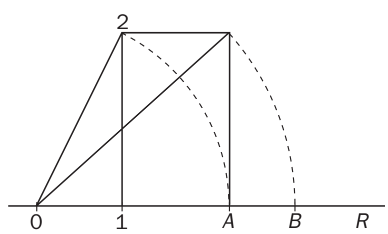




1.43. Indica qué números reales representan los puntos A y B de la figura.

$A = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$B = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$



Valor absoluto e intervalos

1.44. Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $|2x - 4| + x$ b) $|x| + |2x|$ c) $|x - 1| + |x + 1|$ d) $x + |x| + |x - 2|$

a) $|2x - 4| + x = \begin{cases} -2x + 4 + x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 + x & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 2 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

b) $|x| + |2x| = \begin{cases} -x - 2x & \text{si } x < 0 \\ x + 2x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Se podía haber hecho $|x| + |2x| = |x| + 2|x| = 3|x|$

c) $|x - 1| + |x + 1| = \begin{cases} -(x - 1) - (x + 1) & \text{si } x \leqslant -1 \\ -(x - 1) + x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 + x + 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

d) $x + |x| + |x - 2| = \begin{cases} x - x - x + 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x + x - x + 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ x + x + x - 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} -x + 2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x + 2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 3x - 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$

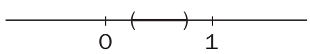
1.45. Dados los conjuntos $A = (-2, +\infty)$, $B = (-2, 0]$ y $C = [0, 4)$, calcula $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.

$A \cup B \cup C = A = (-2, +\infty)$ $A \cap B \cap C = \{0\}$

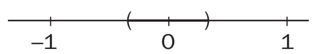
1.46. Expresa mediante un intervalo los siguientes conjuntos de números reales y represéntalos en la recta real.

a) $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$ b) $|2x + 6| < 1$ c) $|x| < \frac{1}{3}$

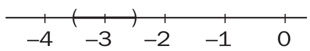
a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$



c) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$



b) $|x + 3| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{-7}{2}, \frac{-5}{2}\right)$



Aproximaciones y errores

1.47. Da la expresión aproximada que se pide en cada caso.

a) $\frac{23}{7}$ por exceso con tres cifras decimales

b) $\sqrt{5} + \sqrt{125}$ por defecto con dos cifras decimales

c) $2\pi - 1$ redondeado a tres cifras decimales

a) $\frac{23}{7} \approx 3{,}286$ b) $\sqrt{5} + \sqrt{125} \approx 13{,}41$ c) $2\pi - 1 \approx 5{,}283$

1.48. Acota el error relativo que se comete al tomar como aproximación del número áureo $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ el número racional 1,618.

Error relativo: $E_r = \frac{\left|\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1{,}618\right|}{1{,}618} < \frac{0{,}00004}{1{,}618} < 0{,}000022$

Notación científica

1.49. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en notación científica.

a) $10^8 - 4 \cdot 10^6$

b) $0{,}00025 \cdot 0{,}0015$

c) $235000 \cdot 0{,}00025$

d) $150000000 : 450000$

e) $0{,}00006 : 45000000$

f) $0{,}0025 \cdot 10^{-13} : 10^{-23}$

a) $10^8 - 4 \cdot 10^6 = 9{,}6 \cdot 10^7$

b) $0{,}00025 \cdot 0{,}0015 = 3{,}75 \cdot 10^{-7}$

c) $235000 \cdot 0{,}00025 = 5{,}875 \cdot 10$

d) $150000000 : 450000 = 3{,}333... \cdot 10^2$

e) $0{,}00006 : 45000000 = 1{,}333... \cdot 10^{-12}$

f) $0{,}0025 \cdot 10^{-13} : 10^{-23} = 2{,}5 \cdot 10^7$

Radicales

1.50. Simplifica el valor de cada expresión.

a) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4} \cdot 3^{-3}}$

b) $\dfrac{27^{-15} \cdot (-75)^{40}}{45^{35} \cdot (-15)^{60}}$

c) $\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{12}$

d) $\sqrt[4]{390625 \cdot a^5b^{16}}$

e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$

g) $\left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{2 - \dfrac{1}{2}}\right)^2$

h) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}$

i) $16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}}$

j) $\sqrt[3]{81a^3} + 2a\sqrt[3]{24}$

k) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}$

l) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

a) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{-3}}{2^{-4} \cdot 3^{-3}} = \dfrac{\frac{2^2}{3^2} \cdot \frac{3^3}{2^6}}{\frac{1}{2^4 \cdot 3^3}} = \dfrac{2^2 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^3}{3^2 \cdot 2^6} = 3^4 = 81$

b) $\dfrac{27^{-15} \cdot (-75)^{40}}{45^{35} \cdot (-15)^{-60}} = \dfrac{(3^3)^{-15}(3 \cdot 5^2)^{40}}{(3^2 \cdot 5)^{35}(3 \cdot 5)^{-60}} = \dfrac{3^{-45} \cdot 3^{40} \cdot 5^{80}}{3^{70} \cdot 5^{35} \cdot 3^{-60} \cdot 5^{-60}} = 3^{-15} \cdot 5^{105}$

c) $\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2 \cdot 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{390625 \cdot a^5b^{16}} = \sqrt[4]{5^8a^5b^{16}} = 5^2ab^4\sqrt[4]{a} = 25a^2b^4\sqrt[4]{a}$

e) $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^6x^4x^9} = \sqrt[12]{x^{19}} = x\sqrt[12]{x^7}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3^4 3^2 3} = \sqrt[8]{3^7}$

g) $\left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{2 - \dfrac{1}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{4} + 2 - \dfrac{1}{2} - 2 \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

h) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[12]{\dfrac{(x^3)^3}{x^4}} = \sqrt[12]{x^5}$

i) $16^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16} + \sqrt{3^6} = 4 + 27 = 31$

j) $\sqrt[3]{81a^3} + 2a\sqrt[3]{24} = 3a\sqrt[3]{3} + 4a\sqrt[3]{3} = 7a\sqrt[3]{3}$

k) $\sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\sqrt[6]{2^3 4^2}} = \sqrt[18]{2^7}$

l) $\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \dfrac{2 + 3}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

1.51. Opera y simplifica.

a) $(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + ... + (-2)^8$

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{80} - \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{5}$

c) $2 \cdot \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + 3\sqrt{2}\right)$

a) $(-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + ... + (-2)^8 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + 256 = 171$

b) $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{80} - \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{405} - \sqrt[4]{5} = \dfrac{1}{3} \cdot 2\sqrt[4]{5} - \dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = -\dfrac{11}{6}\sqrt[4]{5}$

c) $2 \cdot \left(2 - 3\sqrt{2}\right)^2 + \left(2 - 3\sqrt{2}\right) \cdot \left(2 + 3\sqrt{2}\right) = 2\left(4 + 8 - 12\sqrt{2}\right) + 4 - 18 = 30 - 24\sqrt{2}$

1.52. Racionaliza los denominadores.

a) $\dfrac{a}{a\sqrt[6]{a^8}}$ b) $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}}$ c) $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+2}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ f) $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$

a) $\dfrac{a}{a\sqrt[6]{a^8}} = \dfrac{1}{a\sqrt[6]{a^2}} = \dfrac{1}{a\sqrt[3]{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}$

b) $\dfrac{3y}{2\sqrt[5]{y^2}} = \dfrac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2\sqrt[5]{y^2}\cdot\sqrt[5]{y^3}} = \dfrac{3y\sqrt[5]{y^3}}{2y} = \dfrac{3\sqrt[5]{y^3}}{2}$

c) $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+2}} = \dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{2\sqrt{x+2}\sqrt{x+2}} = \dfrac{(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{2(x+2)} = \dfrac{\sqrt{x+2}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}-2}{1-2} = 2-\sqrt{2}$

e) $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{2\sqrt{18}+2\sqrt{12}}{3-2} = 6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$

f) $\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{6}\cdot\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)} = \dfrac{12\sqrt{18}-18\sqrt{12}}{12-18} = 3\sqrt{12}-2\sqrt{18} = 6\sqrt{3}-6\sqrt{2}$

Números combinatorios. Binomio de Newton

1.53. Calcula las siguientes operaciones.

a) $\dbinom{252}{250}$ b) $\dbinom{25}{3}+\dbinom{25}{4}$ c) $\dbinom{4}{0}+\dbinom{4}{1}+\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}$ d) $\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{n-1}$

a) $\dbinom{252}{250}=\dbinom{252}{2}=31\,626$

b) $\dbinom{25}{3}+\dbinom{25}{4}=\dbinom{26}{4}=14\,950$

c) $\dbinom{4}{0}+\dbinom{4}{1}+\dbinom{4}{2}+\dbinom{4}{3}=1+4+6+4=15$

d) $\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{n-1}=\dbinom{n+2}{2}+\dbinom{n+2}{3}=\dbinom{n+3}{3}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}=\dfrac{n^3+6n^2+11n+6}{6}$

1.54. Simplifica las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!}$ b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!}$ c) $\dfrac{\dbinom{n+3}{n}+\dbinom{n+2}{n}}{\dfrac{n+6}{6}}$ d) $\dfrac{2^{n-3}\cdot(n+2)!}{2^{n-1}\cdot\dbinom{n+2}{2}}$

a) $\dfrac{6!}{5!}+\dfrac{8!}{6!} = 6+8\cdot 7 = 6+56 = 62$

b) $\dfrac{n!}{(n-1)!}+\dfrac{(n+2)!}{n!} = n+(n+2)(n+1) = n+n^2+3n+2 = n^2+4n+2$

c) $\dfrac{\dbinom{n+3}{n}+\dbinom{n+2}{n}}{\dfrac{n+6}{6}} = \dfrac{\dbinom{n+3}{3}+\dbinom{n+2}{2}}{\dfrac{n+6}{6}} = \dfrac{\dfrac{n^3+6n^2+11n+6}{6}+\dfrac{n^2+3n+2}{2}}{\dfrac{n+6}{6}} =$

$= \dfrac{n^3+6n^2+11n+6+3n^2+9n+6}{n+6} = \dfrac{n^3+9n^2+20n+12}{n+6} = (n+1)(n+2) = n^2+3n+2$

d) $\dfrac{2^{n-3}\cdot(n+2)!}{2^{n-1}\cdot\dbinom{n+2}{2}} = \dfrac{2^{n-3-n+1}(n+2)!}{\dfrac{(n+2)!}{2!\cdot n!}} = 2^{-2}\cdot 2\cdot n! = \dfrac{n!}{2}$

1.55. (TIC) Realiza los desarrollos de los siguientes binomios.

a) $(2 + x)^4$

b) $\left(2 - \frac{x}{3}\right)^3$

c) $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}\right)^5$

d) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6$

e) $\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2$

f) $\left(2 - 3\sqrt{3}\right)^3$

g) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)^4$

h) $\left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^3$

a) $(2 + x)^4 = \binom{4}{0} \cdot 2^4 + \binom{4}{1} \cdot 2^3 \cdot x + \binom{4}{2} \cdot 2^2 \cdot x^2 + \binom{4}{3} \cdot 2 \cdot x^3 + \binom{4}{4} \cdot x^4 = 16 + 32x + 24x^2 + 8x^3 + x^4$

b) $\left(2 - \frac{x}{3}\right)^3 = \binom{3}{0} \cdot 2^3 - \binom{3}{1} \cdot 2^2 \cdot \frac{x}{3} + \binom{3}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^3 = 8 - 4x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{27}x^3$

c) $\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}\right)^5 = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^4 \cdot \frac{2}{x^2} + \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^2 + \binom{5}{3} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^3 + \binom{5}{4} \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^4 + \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{2}{x^2}\right)^5 =$

$= \frac{x^5}{32} + 5 \cdot \frac{x^4}{16} + \frac{2}{x^2} + 10 \cdot \frac{x^3}{8} \cdot \frac{4}{x^4} + 10 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \frac{8}{x^6} + 5 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{16}{x^8} + \frac{32}{x^{10}} = \frac{x^5}{32} + \frac{5x^2}{8} + \frac{5}{x} + \frac{20}{x^4} + \frac{40}{x^7} + \frac{32}{x^{10}}$

d) $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^6 = \binom{6}{0} \cdot (2x^2)^6 - \binom{6}{1} \cdot (2x^2)^5 \cdot \frac{3}{x} + \binom{6}{2} \cdot (2x^2)^4 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 - \binom{6}{3} \cdot (2x^2)^3 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 + \binom{6}{4} \cdot (2x^2)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^4 - \binom{6}{5} \cdot 2x^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^5 + \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^6 =$

$= 64x^{12} - 576x^9 + 2160x^6 - 4320x^3 + 4860 - \frac{2916}{x^3} + \frac{729}{x^6}$

e) $\left(1 + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 8 + 4\sqrt{2} = 9 + 4\sqrt{2}$

f) $\left(2 - 3\sqrt{3}\right)^3 = 8 - 3 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} + 3 \cdot 2 \cdot 27 - 81\sqrt{3} = 170 - 117\sqrt{3}$

g) $\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right)^4 = \left(\frac{2 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^4 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{256}{4} = 64$

h) $\left(5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)^3 = 125 \cdot 2\sqrt{2} - 3 \cdot 50 \cdot 2\sqrt{3} + 3 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 12 - 24\sqrt{3} = 430\sqrt{2} - 324\sqrt{3}$

1.56. Calcula el término que se indica en cada uno de los siguientes desarrollos.

a) El quinto término de $(2 + x)^8$

b) El tercer término de $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{x}\right)^6$

c) El último término de $(2a^2b - 3a^3)^7$

a) $T_5 = \binom{8}{4} 2^4 \cdot x^4 = 70 \cdot 16 \cdot x^4 = 1120x^4$

b) $T_3 = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 15 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{9}{x^2} = \frac{80}{3x^2}$

c) $T_8 = -\binom{7}{7} \cdot (3a^3)^7 = -2187a^{21}$

Logaritmos

1.57. Aplicando la definición, calcula el valor de los siguientes logaritmos.

a) $\log_2 \frac{1}{8}$ c) $\log \frac{1}{1000}$ e) $\log_{\sqrt{8}} \left(2\sqrt{2}\right)$ g) $\log_{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2}\right)^3$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}$ d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$ f) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right)$ h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$

a) $\log_2 \frac{1}{8} = x \Rightarrow 2^x = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow x = -3$

b) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{1}{3} \Rightarrow 9^{-x} = 3^{-1} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{-1} \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $\log \frac{1}{1000} = x \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

e) $\log_{\sqrt{8}} \left(2\sqrt{2}\right) = x \Rightarrow \left(\sqrt{8}\right)^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 1$

f) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right) = x \Rightarrow \left(\sqrt{3}\right)^x = 3^{-2} \Rightarrow 3^{\frac{x}{2}} = 3^{-2} \Rightarrow x = -4$

g) $\log_{\sqrt{2}} \left(2\sqrt{2}\right)^3 = x \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^x = \left(2\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} = 2^{\frac{9}{2}} \Rightarrow x = 9$

h) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{\frac{6}{3}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^2 \Rightarrow x = -2$

1.58. Calcula, si es posible, el valor de x en cada una de las siguientes expresiones.

a) $\log_x 8 = -3$ c) $\log_3(-81) = x$ e) $\log_x \sqrt{2} = 0$ g) $\log_3 x = -1$

b) $\log_{-3} x = 9$ d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2$ f) $\log_1 2 = x$ h) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x$

a) $\log_x 8 = -3 \Rightarrow x^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

b) $\log_{-3} x = 9$. No está definido.

c) $\log_3(-81) = x$. No está definido.

d) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} x = -2 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2} = 2$

e) $\log_x \sqrt{2} = 0$. No existe x.

f) $\log_1 2 = x$. No está definido.

g) $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

h) $\log_{\frac{1}{a}} a^2 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^2 \Rightarrow a^{-x} = a^2 \Rightarrow x = -2$

1.59. Sabiendo que $\log 2 \approx 0{,}301$ y que $\log 3 \approx 0{,}477$, calcula los logaritmos decimales de los siguientes números.

a) 250 b) 0,72 c) 5,4 d) $\sqrt{18}$ e) $\sqrt[4]{6}$ f) 2,4

a) $\log 250 = \log \frac{1000}{4} = \log 1000 - \log 4 = 3 - \log 2^2 = 3 - 2\log 2 \approx 2{,}398$

b) $\log 0{,}72 = \log \frac{72}{100} = \log(2^3 \cdot 3^2) - \log 100 = 3\log 2 + 2\log 3 - 2 \approx -0{,}143$

c) $\log 5{,}4 = \log \frac{54}{10} = \log 54 - \log 10 = \log(3^3 \cdot 2) - 1 = 3\log 3 + \log 2 - 1 \approx 0{,}7302$

d) $\log \sqrt{18} = \frac{\log 18}{2} = \frac{\log(2 \cdot 3^2)}{2} = \frac{\log 2 + 2\log 3}{2} \approx 0{,}628$

e) $\log \sqrt[4]{6} = \frac{1}{4}\log 6 = \frac{1}{4}(\log 2 + \log 3) \approx 0{,}1945$

f) $\log 2{,}4 = \log \frac{24}{10} = \log 2^3 + \log 3 - \log 10 = 3\log 2 + \log 3 - 1 \approx 0{,}38$

1.60. Sabiendo que $\log_3 2 \approx 0{,}631$ y que $\log_3 5 \approx 1{,}465$, calcula el valor del logaritmo en base 3 de 150.

$$\log_3 150 = \log_3(2 \cdot 3 \cdot 5^2) = \log_3 2 + \log_3 3 + 2\log_3 5 = 0{,}631 + 1 + 2 \cdot 1{,}465 = 4{,}561$$

1.61. Toma logaritmos decimales en las siguientes igualdades y desarrolla las expresiones.

a) $P = 10x^3yz^3$

b) $Q = \dfrac{100x^2}{x + y}$

c) $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2 \cdot y^5}{3z^3}}$

d) $x = a^4 \cdot b^3 \cdot c^{\frac{3}{2}}$

e) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{a \cdot x}$

f) $x \cdot y = \dfrac{(m + 2n) \cdot n^2}{m - 2n}$

a) $P = 10x^3yz^3 \Rightarrow \log P = 1 + 3\log x + \log y + 3\log z$

b) $Q = \dfrac{100x^2}{x + y} \Rightarrow \log Q = 2 + 2\log x - \log(x + y)$

c) $R = \sqrt[3]{\dfrac{2x^2 \cdot y^5}{3z^3}} \Rightarrow \log R = \dfrac{\log 2 + 2\log x + 5\log y - \log 3 - 3\log z}{3}$

d) $\log x = 4\log a + 3\log b + \dfrac{3}{2}\log c$

e) $\log y = \dfrac{2}{3}\log x - \log a - \log x = -\log a - \dfrac{1}{3}\log x$

f) $\log x + \log y = \log(m + 2n) + 2\log n - \log(m - 2n)$

1.62. Expresa el valor de E en cada caso sin que aparezcan logaritmos.

a) $\log E = 2 - 3\log x + \log y - 5\log z$

b) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z$

c) $\log E = \log(x - 2y) + \log(x + 2y)$

d) $\log E = 3\log(x + 10) - \log\dfrac{(2x + 20)}{3} + \log\dfrac{3}{2}$

a) $\log E = \log 100 - \log x^3 + \log y - \log z^5 = \log\dfrac{100y}{x^3 \cdot z^5} \Rightarrow E = \dfrac{100y}{x^3 \cdot z^5}$

b) $\log E = 3\log 2 - 4\log x + 3\log y - 2\log z \Rightarrow E = \dfrac{8y^3}{x^4z^2}$

c) $\log E = \log(x - 2y) + \log(x + 2y) \Rightarrow E = (x - 2y) \cdot (x + 2y) = x^2 - 4y^2$

d) $\log E = 3\log(x + 10) - \log\dfrac{(2x + 20)}{3} + \log\dfrac{3}{2} \Rightarrow E = \dfrac{9 \cdot (x + 10)^3}{2 \cdot (2x + 20)} = \dfrac{9}{4}(x + 10)^2$

1.63. (TIC) Con la ayuda de la calculadora, obtén aproximaciones decimales hasta las milésimas de los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 20$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5}$

c) $\log_{0,5} 60$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3$

e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3}$

f) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2}$

a) $\log_3 20 = \dfrac{\log 20}{\log 3} = 2{,}727$

b) $\log_{\frac{1}{4}} \dfrac{7}{5} = \dfrac{\log\frac{7}{5}}{\log\frac{1}{4}} = -0{,}243$

c) $\log_{0,5} 60 = \dfrac{\log 60}{\log 0{,}5} = -5{,}907$

d) $\log_{\sqrt{2}} 3 = \dfrac{\log 3}{\log\sqrt{2}} = 3{,}17$

e) $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \dfrac{\log\sqrt{3}}{\log\sqrt{2}} = 1{,}585$

f) $\log_{\frac{2}{5}} \sqrt[3]{2} = \dfrac{\log\sqrt[3]{2}}{\log\frac{2}{5}} = -0{,}252$

1.64. Calcula el valor de x en cada caso.

a) $2500 = 2000 \cdot 1{,}05^x$

b) $20 = \log_x 5 + 15$

c) $2 \cdot 10^6 = x^{12}$

d) $0{,}025 = 0{,}5 \cdot e^x$

e) $3 \cdot 10^{-5} = 2^{-50x}$

f) $\log_x 5 + 1 = \log_x 2$

a) $1{,}05^x = \frac{2500}{2000} = \frac{5}{4} \Rightarrow \log 1{,}05^x = \log 1{,}25 \Rightarrow x \log 1{,}05 = \log 1{,}25 \Rightarrow x = \frac{\log 1{,}25}{\log 1{,}05} = 4{,}574$

b) $5 = \log_x 5 \Rightarrow x^5 = 5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{5} = 1{,}38$

c) $x = \sqrt[12]{2 \cdot 10^6} = 3{,}35$

d) $e^x = \frac{0{,}025}{0{,}5} = 0{,}05 \Rightarrow x = \ln 0{,}05 = -2{,}996$

e) $\log(3 \cdot 10^{-5}) = -50x \cdot \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log(3 \cdot 10^{-5})}{-50 \log 2} = 0{,}3$

f) $\log_x 5 + \log_x x = \log_x 2 \Rightarrow \log_x 5x = \log_x 2 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

PROBLEMAS

1.65. Al realizar una encuesta sobre el interés de los habitantes de una localidad en relación con los equipos informáticos, se observó que exactamente el número de encuestados que contestaron que en su casa había más de un ordenador era el 40,454545…% del total.

¿Cuántas personas formaban parte de la muestra si se sabe que eran menos de 300?

$$N = \frac{40{,}4545...}{100} = 0{,}40454545... \Rightarrow \begin{cases} 10\,000N = 4045{,}454545... \\ 100N = 40{,}454545... \end{cases} \Rightarrow N = \frac{4005}{9900} = \frac{89}{220}$$

Para calcular el número de encuestados que contestaron que tenían más de un ordenador, se debe multiplicar el total por la fracción irreducible $\frac{89}{220}$. Por tanto, el número total de encuestados debe ser múltiplo de 220 y, al ser menor que 300, es exactamente 220.

1.66. En una clase se realiza una encuesta sobre las aficiones deportivas. El 92,592592592...% del total de la clase contesta que practica algún deporte, y la mitad, que le gusta el fútbol.

Si la clase tiene como máximo 35 alumnos, razona si son posibles los datos anteriores.

$$N = \frac{92{,}592592...}{100} = 0{,}92592592... \Rightarrow \begin{cases} 1000N = 925{,}925925... \\ N = 0{,}925925... \end{cases} \Rightarrow N = \frac{925}{999} = \frac{89}{220} = \frac{25}{27}$$

Para calcular el número de alumnos que contestaron que practican un deporte, se debe multiplicar el total por la fracción irreducible $\frac{25}{27}$. Por tanto, el número total de encuestados debe ser múltiplo de 27.

Pero también debe ser par, ya que la mitad afirma que le gusta el fútbol.

En consecuencia, el mínimo número de alumnos en la clase es de 54. Por tanto, los datos no son correctos.

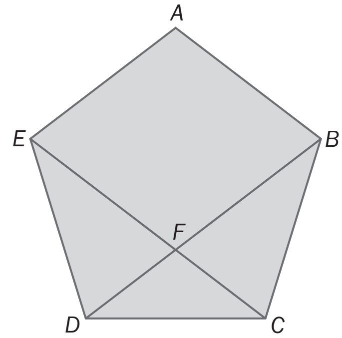
1.67. Calcula de forma exacta el número irracional que representa la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado. Comprueba que se trata del número áureo.

Para ello, sigue los siguientes pasos:

Demuestra que los triángulos *DFC* y *DBC* son semejantes calculando sus ángulos.

Demuestra que el triángulo *BFC* es isósceles.

Aplicando el teorema de Tales, calcula la relación entre los lados que corresponden a la diagonal y el lado del pentágono.



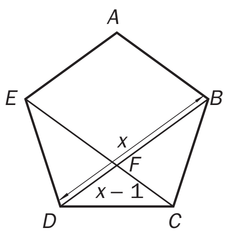
El ángulo interior de un pentágono regular es $\dfrac{(2 \cdot 5 - 4) \cdot 90°}{5} = 108°$.

El triángulo *DBC* es isósceles, y sus ángulos miden 108°, 36° y 36°.

El triángulo *DFC* es también isósceles, y sus ángulos miden 36°, 36° y 108°. Por tanto, *DFC* y *DBC* son semejantes.

El ángulo *BCF* mide 108° − 36° = 72°. El ángulo *BFC* mide 180° − 108° = 72°. Por tanto, *BFC* es isósceles.

Suponiendo un pentágono regular de lado 1:



Aplicando el teorema de Tales a los triángulos semejantes:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{DC}{DF} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1} \Rightarrow x^2 - x = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(En la ecuación de segundo grado, la otra solución es negativa y no tiene sentido.)

$$x = \frac{DB}{DC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

1.68. Demuestra que el número áureo verifica las siguientes propiedades.

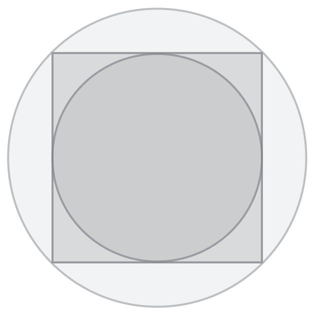
a) $\phi^2 = \phi + 1$ b) $\phi - 1 = \dfrac{1}{\phi}$ c) $\phi^3 = \dfrac{\phi + 1}{\phi + 1}$

a) $\phi^2 = \left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \phi$

b) $\phi^2 = 1 + \phi \Rightarrow \dfrac{\phi^2}{\phi} = \dfrac{1 + \phi}{\phi} \Rightarrow \phi = \dfrac{1}{\phi} + 1 \Rightarrow \phi - 1 = \dfrac{1}{\phi}$

c) $\phi^3 = \phi^2 \cdot \phi = (1 + \phi) \cdot \phi = \dfrac{1 + \phi}{\dfrac{1}{\phi}} = \dfrac{\phi + 1}{\phi - 1}$

1.69. El área de un cuadrado es de 10,5 cm². Calcula las áreas de sus círculos inscrito y circunscrito, redondeando los resultados con dos cifras decimales.



El lado del cuadrado mide $x = \sqrt{10,5} = 3,24$ cm.

La diagonal del cuadrado mide $\sqrt{2 \cdot 10,5} = 4,58$ cm.

Área del círculo inscrito: $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{3,24}{2}\right)^2 = 8,2 \text{ cm}^2$

Área del círculo circunscrito: $S = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\dfrac{4,58}{2}\right)^2 = 16,5 \text{ cm}^2$

1.70. **Calcula la medida de la diagonal de un paralelepípedo cuyos lados miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{5}$ cm, respectivamente. ¿Qué tipo de número es el resultado?**

Aproxima el resultado redondeando a dos decimales y calcula los errores absoluto y relativo cometidos.

$d = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{23}$ cm. La medida de la diagonal es un número irracional.

Redondeando, $\sqrt{23} \approx 4{,}80$ cm.

Error absoluto: $E_a = \left|\sqrt{23} - 4{,}80\right| = 0{,}004$

Error relativo: $E_r = \dfrac{0{,}004}{4{,}80} = 0{,}0008$

1.71. **La diagonal de un cubo mide exactamente 1,252 cm. Halla la superficie del cubo aproximando su diagonal por 1,25 cm. Calcula el error relativo cometido.**

Usando el valor aproximado: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} \Rightarrow 1{,}25 = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \dfrac{1{,}25}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = 6a^2 = \dfrac{6 \cdot 1{,}25^2}{3} = 3{,}125 \text{ cm}^2$

Usando el valor real: $a = \dfrac{1{,}252}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = 6a^2 = \dfrac{6 \cdot 1{,}252^2}{3} = 3{,}135008 \text{ cm}^2$

Error relativo: $E_r = \dfrac{3{,}135008 - 3{,}125}{3{,}135008} = 0{,}003$

1.72. **En la tabla siguiente aparecen las medidas de una niña y de una torre.**

Altura	
Real	**Obtenida con instrumento de medida**
92 cm	90 cm
38 m	37 m

Indica cuál de las dos medidas ha sido más precisa y justifica tu respuesta.

En el primer caso, el error relativo es $\dfrac{2}{92} = \dfrac{1}{46}$. En el segundo, el error relativo es $\dfrac{1}{38}$.

La medida de la niña es más precisa, ya que el error relativo es menor.

1.73. **Javier pretende colocar césped artificial en un jardín cuadrado del que sabe que su lado está comprendido entre 15 y 16 metros.**

El coste de cada metro cuadrado de dicho césped asciende a 30 euros y 10 céntimos, y el presupuesto con el que cuenta es de 7000 euros.

Calcula los costes máximo y mínimo, y decide si la obra podrá ser emprendida.

$15 \leqslant \text{lado} \leqslant 16 \Rightarrow 225 \leqslant \text{área} \leqslant 256 \Rightarrow 6772{,}5 \leqslant \text{coste} \leqslant 7705{,}6$

Por tanto, el presupuesto podría ser insuficiente.

1.74. **El radio de la rueda de una bicicleta tiene una longitud comprendida entre 19 y 20 cm.**

Calcula los números máximo y mínimo de vueltas completas que dará al recorrer una distancia de 20 km.

$19 \leqslant r \leqslant 20 \Rightarrow 119{,}38 < \text{longitud rueda} < 125{,}67 \Rightarrow \dfrac{2\,000\,000}{125{,}67} < \text{n.º de vueltas} < \dfrac{2\,000\,000}{119{,}38} \Rightarrow$

$\Rightarrow 15\,914 < \text{vueltas} < 16\,754$

1.75. Si un automóvil que costó 14 425 euros se deprecia un 15% anual, ¿cuánto valdrá a los 6 años? ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 3600 euros?

A los 6 años, el coche valdrá $V_6 = 14\,425 \cdot 0{,}85^6 = 5440{,}38$ euros.

Para calcular dentro de cuántos años su valor será inferior a 3600 euros, se resuelve la siguiente inecuación:

$$14\,425 \cdot 0{,}85^t < 3600 \Rightarrow 0{,}85^t < \frac{3600}{14\,425} \Rightarrow t \cdot \log 0{,}85 < \log\frac{3600}{14\,425} \Rightarrow t > 8{,}54$$

Deberán pasar, al menos, 9 años.

1.76. Se llama unidad astronómica (UA) a la distancia media que separa la Tierra del Sol y que equivale a $1{,}49598 \cdot 10^8$ km.

a) Sabiendo que el 1 de enero la distancia entre la Tierra y el Sol es de $1{,}471 \cdot 10^8$ km, exprésala en unidades astronómicas.

b) Sabiendo que la distancia media entre Júpiter y el Sol es de 5,2 UA, exprésala en kilómetros.

a) $\dfrac{1{,}471 \cdot 10^8}{1{,}49598 \cdot 10^8} = 0{,}9833$ UA

b) $5{,}2 \times 1{,}49598 \cdot 10^8 = 7{,}779 \cdot 10^8$ km

1.77. Una población de conejos aumenta anualmente en un 50%. Si en el momento inicial había 100 conejos:

a) ¿Cuántos habrá al cabo de 10 años?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que su número sea de 30 000?

c) Si debido a una enfermedad, la tasa de crecimiento cayera al 10%, ¿cuánto tiempo tardaría la población inicial en triplicarse?

a) $t = 10 \Rightarrow P(10) = 100 \cdot 1{,}5^{10} = 5766{,}5 \Rightarrow$ Habrá 5766 conejos

b) $100 \cdot 1{,}5^t = 30\,000 \Rightarrow 1{,}5^t = 300 \Rightarrow t = \dfrac{\log 300}{\log 1{,}5} = 14{,}06$ años

c) $100 \cdot 1{,}1^t = 300 \Rightarrow 1{,}1^t = 3 \Rightarrow t = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}1} = 11{,}53$ años

1.78. El valor de una vivienda, cuando han pasado t años desde su adquisición, es $V = k \cdot e^{\alpha \cdot t}$.

La vivienda se compró por 250 000 euros, y a los 10 años valía 450 000.

a) Calcula el valor de k y α.

b) Calcula el valor de la vivienda a los 20 años.

c) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir desde la compra, para que el valor de la vivienda se triplique?

d) Un trabajador que gana el salario medio puede comprar una vivienda de 90 metros cuadrados. Si el salario medio aumenta un 3% cada año, al cabo de 10 años, ¿cuál será la superficie de la vivienda que podría comprar el mismo trabajador? (supón que el resto de sus condiciones de vida no han variado.)

a) $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow k \cdot e^{\alpha \cdot 0} = k = 250\,000 \\ t = 10 \Rightarrow k \cdot e^{10\alpha} = 450\,000 \end{cases} \Rightarrow k = 250\,000 \Rightarrow e^{10\alpha} = \dfrac{450\,000}{250\,000} = 1{,}8 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{10}\ln 1{,}8 = 0{,}0588 \Rightarrow$

$\Rightarrow V = 250\,000 \cdot e^{0{,}0588t}$

b) $V = 250\,000 \cdot e^{0{,}0588 \cdot 20} \approx 810\,000$

c) $3V = V \cdot e^{0{,}0588t} \Rightarrow t = \dfrac{\ln 3}{0{,}0588} = 18{,}68$ años

d) Si el salario medio inicial es S_0, dentro de 10 años dispondrá de un salario $S = S_0 \cdot 1{,}03^{10} = 1{,}34 \cdot S_0$.

Inicialmente podía pagar con su salario 90 m², por lo que el precio del m² salía por $V_0 = \dfrac{S_0}{90}$.

Después de 10 años, el m² sale por $V = \dfrac{S_0}{90} \cdot e^{0{,}0588 \cdot 10} = 0{,}02\ S_0$.

Con su salario podrá comprar un piso de $\dfrac{1{,}34\ S_0}{0{,}02\ S_0} = 67$ m².

1.79. Según la escala de Richter, las magnitudes de los terremotos se obtienen mediante la fórmula:

$$M = \frac{\log E}{1{,}44} - 3{,}64$$

siendo E la energía liberada por el seísmo en julios.

La energía liberada por un terremoto de magnitud 6,4 fue 200 veces la energía liberada por una de sus réplicas. Calcula la magnitud de esta réplica.

Energía del terremoto: $6{,}4 = \dfrac{\log E}{1{,}44} - 3{,}64 \Rightarrow \log E = 14{,}4577 \Rightarrow E = 2{,}87 \cdot 10^{14}$ julios

Energía de la réplica: $E_r = \dfrac{2{,}87 \cdot 10^{14}}{200} = 1{,}43 \cdot 10^{12}$ julios

Magnitud de la réplica: $M_r = \dfrac{\log(1{,}43 \cdot 10^{12})}{1{,}44} - 3{,}64 = 4{,}8$

PROFUNDIZACIÓN

1.80. Sea a un número positivo y diferente de la unidad. Demuestra que la suma de a y su inverso es siempre superior a 2.

$a > 0$ y $a \neq 1$

$$\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} - 2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = a + \frac{1}{a} - 2 > 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} > 2$$

1.81. Demuestra que si a, b y c son números positivos y diferentes, entonces se verifica la siguiente desigualdad.

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) > 9$$

Utilizando el ejercicio anterior:

$$(a + b + c) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{c}{c} =$$

$$= 1 + 1 + 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

1.82. Demuestra que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

Supongamos que es racional y que, por tanto, lo podemos escribir mediante una fracción irreducible:

$$\sqrt{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 3b^2 \Rightarrow a^2 \text{ es múltiplo de } 3 \Rightarrow a \text{ es múltiplo de } 3$$

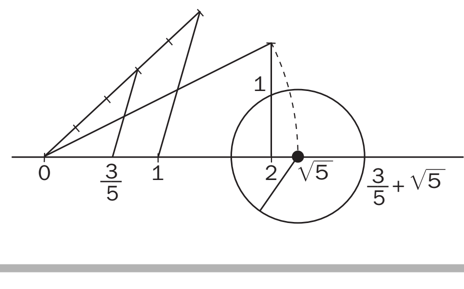
$a = 3\lambda \Rightarrow a^2 = 9\lambda^2 \Rightarrow 3b^2 = 9\lambda^2 \Rightarrow b^2 = 3\lambda^2 \Rightarrow b^2$ es múltiplo de $3 \Rightarrow b$ es múltiplo de 3.

Como a y b son ambos múltiplos de 3, la fracción $\dfrac{a}{b}$ no es irreducible.

Se ha llegado a una contradicción con lo supuesto, lo cual quiere decir que es falso; por tanto, $\sqrt{3}$ no se puede escribir como una fracción; es decir, es irracional.

1.83. Representa en la recta real el número irracional $\dfrac{3}{5} + \sqrt{5}$.

Se dibujan $\dfrac{3}{5}$ y $\sqrt{5}$ y se suman con ayuda del compás.

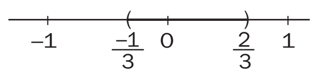


1.84. Desarrolla la expresión $|1 + |x||$ omitiendo los valores absolutos.

Como $1 + |x| > 0 \Rightarrow |1 + |x|| = 1 + |x| = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1.85. Representa en la recta real el conjunto de valores reales x tales que $\left|2x - \frac{1}{3}\right| < 1$ y determínala mediante un intervalo.

$$\left|2x - \frac{1}{3}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{2x - \frac{1}{3}}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|x - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$



1.86. En la siguiente tabla se representan de distinta forma varios conjuntos de números reales. Completa la tabla, representando, cuando sea posible, los diferentes conjuntos de cuatro formas diferentes.

Intervalos	Desigualdad	Valor absoluto	Gráficamente
	$\{-3 \leqslant x \leqslant 1\}$		
$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$			
		$\|x\| > 3$	
			0 5

Intervalos	Desigualdad	Valor absoluto	Gráficamente
$[-3, 1]$	$-3 \leqslant x \leqslant 1$	$\|x + 1\| \leqslant 2$	Falta 354336
$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$	$\{x < 1\} \cup \{x > 2\}$	$\|x - 1{,}5\| > 0{,}5$	Falta 354337
$(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$	$\{x < -3\} \cup \{x > 3\}$	$\|x\| > 3$	Falta 354338
$[0, 5]$	$0 \leqslant x \leqslant 5$	$\|x - 2{,}5\| \leqslant 2{,}5$	0 5

1.87. Sabiendo que $\log_2 3$ es un número real comprendido entre 1,58 y 1,59, calcula dos números reales, lo más próximos posible, entre los que se encuentre el valor de $\log_2 27$.

$1{,}58 < \log_2 3 < 1{,}59 \Rightarrow 3 \cdot 1{,}58 < 3\log_2 3 < 3 \cdot 1{,}59 \Rightarrow 4{,}74 < \log_2 27 < 4{,}77$

1.88. Racionaliza el denominador de estas expresiones.

a) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}$

a) $$\frac{1}{2 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{4 + 2 + 4\sqrt{2} - 3} = \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}{3 + 4\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(2 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(3 - 4\sqrt{2})}{(3 + 4\sqrt{2})(3 - 4\sqrt{2})} = \frac{6 - 8\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{9 - 32} = \frac{-2 -5\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{6}}{-23}$$

b) $$\frac{1}{2 - \sqrt[3]{2}} = \frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{(2 - \sqrt[3]{2}) \cdot (4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})} = \frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{8 + 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{8}} =$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{8 - 2} = -\frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{6}$$

[Aplicando que $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$.]

1.89. Calcula dos números enteros y positivos m y n tales que $\sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$.

$$\left(\sqrt{8 + \sqrt{60}}\right)^2 = \left(\sqrt{m} + \sqrt{n}\right)^2 \Rightarrow 8 + 2\sqrt{15} = m + n + 2\sqrt{m \cdot n} \Rightarrow \begin{cases} m + n = 8 \\ m \cdot n = 15 \end{cases} \Rightarrow m = 3,\ n = 5$$

1.90. a) Calcula los desarrollos de $(1 + x)^n$ y $(x + 1)^n$.

b) Escribe el coeficiente de x^n en el producto de los polinomios $(1 + x)^n \cdot (x + 1)^n$.

c) Con ayuda de la igualdad:

$$(1 + x)^n \cdot (x + 1)^n = (1 + x)^{2n}$$

y del coeficiente hallado en el apartado anterior, demuestra que:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

a) $(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$

$(x + 1)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}$

b) El coeficiente de x^n en $(1 + x)^n(x + 1)^n$ es $\binom{n}{0} \cdot \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \cdot \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \binom{n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$.

c) El término de x^n en el desarrollo $(1 + x)^{2n}$ es $T_k = \binom{2n}{k-1}x^{k-1} \Rightarrow k - 1 = n \Rightarrow k = n + 1$

El coeficiente de x^n en el desarrollo $(1 + x)^{2n}$ es $\binom{2n}{n+1-1} = \binom{2n}{n}$.

De los apartados b y c se deduce que $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

ACTIVIDADES INICIALES

I. **Determina si los siguientes números reales son raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$.**

$x = 1$ $\quad x = -1$ $\quad x = 2$ $\quad x = -2$ $\quad x = 5$

Los números dados se sustituyen directamente en el polinomio:

$P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 10 = 8 \neq 0 \Rightarrow 1$ no es raíz de $P(x)$;

$P(-1) = (-1)^3 - 6 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 10 = 0 \Rightarrow -1$ es raíz de $P(x)$

$P(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 10 = 0 \Rightarrow 2$ es raíz de $P(x)$;

$P(-2) = (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot (-2) + 10 = -28 \neq 0 \Rightarrow -2$ no es raíz de $P(x)$

$P(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 10 = 0 \Rightarrow 5$ es raíz de $P(x)$.

II. **Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.**

a) $\begin{cases} 3x + 2(x - 2y) = 19 \\ \dfrac{x}{3} - 3y = 4 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 2(x - 1) - (y - 2) = 24 \\ 3\left(\dfrac{x}{3} - y\right) + 2y = 15 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 19 \\ x - 9y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5(12 + 9y) - 4y = 19 \\ x = 12 + 9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 24 \\ x - y = 15 \end{cases} \Rightarrow (-1)\begin{cases} 2x - y = 24 \\ -x + y = -15 \end{cases}$

$x = 9 \Rightarrow y = -6$

EJERCICIOS PROPUESTOS

2.1. **Realiza las siguientes operaciones con polinomios.**

a) $(3x^2 + 2x - 5) \cdot (2x^2 + x - 3)$

b) $(2x - 3) \cdot (-2x^2 + 2) + x(-2x^2 + x + 1)$

c) $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x) \cdot (-2x + 5)$

a) $(3x^2 + 2x - 5) \cdot (2x^2 + x - 3) = 6x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4x^3 + 2x^2 - 6x - 10x^2 - 5x + 15 = 6x^4 + 7x^3 - 17x^2 - 11x + 15$

b) $(2x - 3) \cdot (-2x^2 + 2) + x(-2x^2 + x + 1) = -4x^3 + 4x + 6x^2 - 6 - 2x^3 + x^2 + x = -6x^3 + 7x^2 + 5x - 6$

c) $4(x^3 - x + 3) - 2(x^2 + 3x) \cdot (-2x + 5) = 4x^3 - 4x + 12 + 4x^3 - 10x^2 + 12x^2 - 30x = 8x^3 + 2x^2 - 34x + 12$

2.2. **Efectúa las siguientes divisiones.**

a) $(3x^3 + 2x^2 + x - 5) : (3x^2 + 2)$ $\quad$ b) $(3x^4 - 2x^2 - x + 4) : (x + 2)$ $\quad$ c) $(x^3 - 3x^2 - x + 6) : (2x + 3)$

a)

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & +\,2x^2 & +\,x & -\,5 & 3x^2 + 2 \\ \cline{5-5} -3x^3 & & -2x & & x + \frac{2}{3} \text{ (cociente)} \\ \hline & 2x^2 & -\,x & -\,5 & \\ & -2x^2 & & -\,\frac{4}{3} & \\ \hline & & -\,x & -\,\frac{19}{3} & \text{(resto)} \end{array}$$

b) Como el divisor es de la forma $x - a$, se aplica la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 0 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & & -6 & 12 & -20 & 42 \\ \hline & 3 & -6 & 10 & -21 & 46 \end{array}$$

Cociente: $3x^3 - 6x^2 + 10x - 21$. Resto: 46

c) Como el divisor no es de la forma $x - a$, antes de aplicar Ruffini se dividen el dividendo y el divisor por 2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & & -\frac{3}{4} & \frac{27}{8} & -\frac{69}{16} \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{23}{8} & -\frac{21}{16} \end{array}$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 - x + 6}{2x + 3} = \frac{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3}{x + \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{23}{8} - \frac{\frac{21}{8}}{x + \frac{3}{2}}$$

Para obtener el resto se multiplica por 2 el último término

$$R = 2 \cdot \left(-\frac{21}{16}\right) = -\frac{21}{8}$$

2.3. Halla, sin hacer la división, el valor de m para que el polinomio $2x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 6x + 3m$ tenga por resto 12 al dividirlo por $x + 2$.

Por el teorema del resto se tiene:

$$12 = 2 \cdot (-2)^4 + 9 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + 3m \Rightarrow 12 = -20 + 3m \Rightarrow m = \frac{32}{3}$$

2.4. Calcula el valor de k para que el polinomio:

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 4$ sea divisible por $x + 2$.

a) Por el teorema del factor se tiene: $2^3 + 2^2 - 2 \cdot 2 + k = 0 \Rightarrow 8 + 4 - 4 + k = 0 \Rightarrow k = -8$

b) Por el teorema del factor se tiene: $(-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + k \cdot (-2) + 4 = 0 \Rightarrow -8 - 8 - 2k + 4 = 0 \Rightarrow k = -6$

2.5. En cada caso, factoriza el polinomio dado y halla sus raíces enteras.

a) *$x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

b) $9x^2 + 12x + 4$

c) $x^4 - 16$

d) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$

e) $6x^3 + 11x^2 + 6x + 1$

f) $x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 11x - 6$

g) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

h) $x^6 - 9x^4$

a) Aplicando la regla de Ruffini dos veces:

	1	−4	2	4	−3
1		1	−3	−1	3
	1	−3	−1	3	0
1		1	−2	−3	
	1	−2	−3	0	

Así: $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = (x - 1)^2(x^2 - 2x - 3)$

Se calculan las dos últimas raíces:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = (x - 1)^2(x + 1)(x - 3)$

Raíces enteras: -1, 1 (doble) y 3.

b) $$x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{-12 \pm 0}{18} = -\frac{2}{3}$$

Así, $9x^2 + 12x + 4 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = (3x + 2)^2$

No tiene raíces enteras.

c) Se utilizan las igualdades notables:

$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) =$

$= (x^2 - 2^2)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$

Raíces enteras -2 y 2.

d) Aplicando la regla de Ruffini se tiene:

	2	5	−1	−6
1		2	7	6
	2	7	6	0

Por lo tanto:

$2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (x - 1)(2x^2 + 7x + 6)$

Se calculan las raíces del cociente obtenido:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{-7 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow 2x^3 + 5x^2 - x - 6 = 2(x - 1)(x + 2)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

Las raíces enteras son -2 y 1.

e) Aplicando la regla de Ruffini se tiene:

	6	11	6	1
−1		−6	−5	−1
	6	5	1	0

De esta forma:

$6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = (x + 1)(6x^2 + 5x + 1)$

Ahora se calculan las otras dos raíces:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{-5 \pm 1}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 6(x + 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Luego la única raíz entera es -1

f) Es un ejemplo de polinomio sin raíces enteras y que no se puede factorizar de forma sencilla.

g) Aplicando la regla de Ruffini se tiene:

	1	−3	3	−3	2
1		1	−2	1	−2
	1	−2	1	−2	0

Así se llega a:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x^3 - 2x^2 + x - 2)$

Usando de nuevo la regla de Ruffini:

	1	−2	1	−2
2		2	0	2
	1	0	1	0

Con lo que:

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)(x^2 + 1)$

que ya no puede factorizarse más en **R**.

Las raíces enteras son -1 y 2.

h) Se extrae factor común y se utilizan las identidades notables:

$x^6 - 9x^4 = x^4(x^2 - 9) = x^4 (x - 3)(x + 3)$

Las raíces enteras son -3, 0 (doble) y 3.

2.6. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + x + 3$ y $Q(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

c) $P(x) = x$, $Q(x) = x^2 - x$ y $R(x) = x^3 - 2x^2 + x$

d) $P(x) = 12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$ y $Q(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$

e) $P(x) = x^2 - 6x + 8$, $Q(x) = x^2 - 4$ y $R(x) = 2x^2 - 4x$

a) $P(x) = (x - 1)(x + 2)^2 \Rightarrow Q(x) = (x - 1)^2$

m.c.d.$\{P(x), Q(x)\} = x - 1$ m.c.m.$\{P(x), Q(x)\} = (x - 1)^2(x + 2)^2 = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$

b) $P(x) = (x - 1)^2(x + 1)^2(x + 3)$ $Q(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 3)$

m.c.d.$\{P(x), Q(x)\} = (x - 1)(x + 1)(x + 3) = Q(x)$ m.c.m.$\{P(x), Q(x)\} = (x - 1)^2(x + 1)^2(x + 3) = P(x)$

c) $P(x) = x$ $Q(x) = x(x - 1)$ $R(x) = x(x - 1)^2$

m.c.d.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = x = P(x)$ m.c.m.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = x(x - 1)^2 = R(x)$

d) $P(x) = (2x + 1)(2x - 1)(3x - 1)$ $Q(x) = (2x - 1)^2(3x - 1)$

m.c.d.$\{P(x), Q(x)\} = (2x - 1)(3x - 1) = 6x^2 - 5x + 1$

m.c.m.$\{P(x), Q(x)\} = (2x + 1)(2x - 1)^2(3x - 1) = 24x^4 - 20x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

e) $P(x) = (x - 4)(x - 2)$ $Q(x) = (x + 2)(x - 2)$ $R(x) = 2x(x - 2)$

m.c.d.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = 1$ m.c.m.$\{P(x), Q(x), R(x)\} = (x - 2)(x + 2)2x(x + 4) = 2x^4 - 8x^3 - 8x^2 + 32x$

2.7. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + 11x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 8x + 3}$ b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}$

a) $\dfrac{(x + 3)(x - 1)^2(2x - 1)}{(x - 1)(x + 3)(2x - 1)} = x - 1$ b) $\dfrac{(x - 2)(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)(x - 2)^2} = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

2.8. Resuelve las siguientes operaciones con fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{a^2}{a \cdot b} + \dfrac{a \cdot b^2}{b^4} - a$

b) $\dfrac{6}{2 + x} - \dfrac{4}{2 - x} + \dfrac{16}{x^2 - 4}$

c) $(x^2 - y^2) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

d) $\dfrac{a + x}{x^2 - a^2} \cdot \dfrac{x - a}{x + a}$

e) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}$

a) $\dfrac{a^2}{a \cdot b} + \dfrac{a \cdot b^2}{b^4} - a = \dfrac{a^2b^3 + a^2b^2 - a^2b^4}{ab^4} = \dfrac{a^2b^2(b + 1 - b^2)}{ab^4} = \dfrac{ab + a - ab^2}{b^2}$

b) $\dfrac{6}{2 + x} - \dfrac{4}{2 - x} + \dfrac{16}{x^2 - 4} = \dfrac{6x - 12 + 4x + 8 + 16}{(x + 2)(x - 2)} = \dfrac{10x + 12}{x^2 - 4}$

c) $(x^2 - y^2) : \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{(x - y)(x + y)}{\dfrac{x + y}{xy}} = \dfrac{xy(x - y)(x + y)}{x + y} = x^2y - xy^2$

d) $\dfrac{a + x}{x^2 - a^2} \cdot \dfrac{x - a}{x + a} = \dfrac{(a + x)(x - a)}{(x - a)(x + a)^2} = \dfrac{1}{x + a}$

e) $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{x + 1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{x + 1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2x + 1}{x + 1}} = 1 + \dfrac{x + 1}{2x + 1} = \dfrac{3x + 2}{2x + 1}$

2.9. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas.

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4$

c) $(x+1)^3-(x+1)^3=7$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12}$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0$

a) $\frac{2x-3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3x-1}{5}=2x-1 \Rightarrow 10x-15+10x-12x+4=40x-20 \Rightarrow -32x=-9 \Rightarrow x=\frac{9}{32}$

b) $2(3x-2)+x(x-1)=-4 \Rightarrow 6x-4+x^2-x+4=0 \Rightarrow x^2+5x=0 \Rightarrow x(x+5)=0 \Rightarrow x=0;\ x=-5$

c) $(x+1)^3-(x-1)^3=7 \Rightarrow x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1)=7 \Rightarrow 6x^2=5 \Rightarrow x=\sqrt{\frac{5}{6}};\ x=-\sqrt{\frac{5}{6}}$

d) $\frac{x^2+1}{2}-\frac{2x-3}{4}+\frac{x^2}{6}=\frac{59}{12} \Rightarrow 6x^2+6-6x+9+2x^2=59 \Rightarrow 8x^2-6x-44=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2-3x-22=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+352}}{8}=\frac{3\pm 19}{8} \Rightarrow x=\frac{11}{4};\ x=-2$

e) $6x^4+13x^3-8x^2-17x+6=0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(2x+3)(3x-1)=0 \Rightarrow x=1;\ x=-2;\ x=-\frac{3}{2};\ x=\frac{1}{3}$

f) $2x^4-x^3-3x-18=0 \Rightarrow (x-2)(x^2+3)(2x+3)=0 \Rightarrow x=2;\ x=-\frac{3}{2}$

2.10. Escribe una ecuación polinómica de tercer grado tal que una solución sea 2 y la suma y el producto de las otras dos valgan −4 y 5, respectivamente.

$(x-2)(x^2+4x+5)=0 \Rightarrow x^3+2x^2-3x-10=0$ Aunque no todas las soluciones son reales.

2.11. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $x^4-17x^2+16=0$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=0$

c) $x^3-2x^2-15x=0$

d) $\frac{24}{x^2}=3x^2-6$

a) $x^4-17x^2+16=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} z^2-17z+16=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=\frac{17\pm\sqrt{289-64}}{2}=\frac{17\pm 5}{2}=$

$=\begin{cases} z=16=x^2 \Rightarrow x=4;\ x=-4 \\ z=1=x^2 \Rightarrow x=1;\ \ x=-1 \end{cases}$

b) $2(x+1)^4-8x^3-8(x+3)+8=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4+8x^3+12x^2+8x+2-8x^3-8x-24+8=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^4+12x^2-14=0 \Rightarrow x^4+6x^2-7=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+6z-7=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2}=$

$=\begin{cases} z=1=x^2 \Rightarrow x=1;\ x=-1 \\ z=-7=x^2 \Rightarrow -7 \text{ no es real} \end{cases}$

c) $x^3-2x^2-15x=0 \Rightarrow x(x^2-2x-15)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=1\pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=5 \end{cases} \end{cases}$

d) $\frac{24}{x^2}=3x^2-6 \Rightarrow 24=3x^4-6x^2 \Rightarrow$

$3x^4-6x^2-24=0 \Rightarrow x^4-2x^2-8=0$

$\left.\begin{array}{l} z=x^2 \\ z^2=x^4 \end{array}\right\} z^2-2z-8=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z=\frac{2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=$

$=\begin{cases} z=4=x^2 \Rightarrow x=2;\ x=-2 \\ z=-2=x^2 \Rightarrow \sqrt{-2} \text{ no es real} \end{cases}$

2.12. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

a) $x + 2 + \dfrac{2}{x} = -1$ b) $2x - \dfrac{12}{2 - x} = 7 + \dfrac{11x + 11}{9}$ c) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x + 2} = 3$

a) $x+2+\dfrac{2}{x}=-1 \Rightarrow x^2+2x+2=-x \Rightarrow x^2+3x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} \Rightarrow x=\dfrac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=-1 \end{cases}$

b) $2x - \dfrac{12}{2 - x} = 7 + \dfrac{11x + 11}{9} \Rightarrow 9(2 - x)2x - 9 \cdot 12 = 9 \cdot 7(2 - x) + (2 - x)(11x + 11) \Rightarrow$

$\Rightarrow 36x - 18x^2 - 108 = 126 - 63x + 22x + 22 - 11x^2 - 11x \Rightarrow 7x^2 - 88x + 256 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{88 \pm \sqrt{88^2 - 4 \cdot 7 \cdot 256}}{14} = \dfrac{88 \pm \sqrt{576}}{14} \Rightarrow x = \dfrac{88 \pm 24}{14} = \begin{cases} x = 8 \\ x = \dfrac{64}{14} = \dfrac{32}{7} \end{cases}$

c) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x + 2} = 3 \Rightarrow 4(x + 2) + 4x = 3x(x + 2) \Rightarrow 4x + 8 + 4x = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 3 \cdot 8}}{6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \dfrac{2 \pm 10}{6} = \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{8}{6} = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

2.13. Encuentra la solución de estas ecuaciones racionales.

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{7}{8}$ b) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{2x + 3}{x - 1} = \dfrac{11}{3x - 3}$ c) $\dfrac{2x}{x - 2} + \dfrac{3x}{x + 2} = \dfrac{6x^2}{x^2 - 4}$

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{7}{8} \Rightarrow 8x^2 + 8x + 8 = 7x^3 \Rightarrow 7x^3 - 8x^2 - 8x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 2)(7x^2 + 6x + 4) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 7x^2 + 6x + 4 = 0 \\ \text{No tiene soluciones reales} \end{cases}$

b) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{2x + 3}{x - 1} = \dfrac{11}{3x - 3} \Rightarrow 2x(x - 1) + 3(2x + 3) = 11 \Rightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \end{cases}$

c) $\dfrac{2x}{x - 2} + \dfrac{3x}{x + 2} = \dfrac{6x^2}{x^2 - 4} \Rightarrow 2x(x + 2) + 3x(x - 2) = 6x^2 \Rightarrow -x^2 - 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(-x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \text{ solución falsa} \end{cases}$

2.14. Resuelve las siguientes ecuaciones con radicales.

a) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x}} = x - \dfrac{5}{2}$ b) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1} = 5$ c) $\sqrt{x - 7} + \sqrt{2x} = \sqrt{x + 1}$

a) $\dfrac{x - 1}{\sqrt{x}} = x - \dfrac{5}{2} \Rightarrow \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}} = \dfrac{2x - 5}{2} \Rightarrow 2x - 2 = (2x - 5)\sqrt{x} \Rightarrow (2x - 2)^2 = \left((2x - 5)\sqrt{x}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 4 - 8x = (4x^2 + 25 - 20x)x \Rightarrow 4x^3 - 24x^2 + 33x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(4x^2 - 8x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \dfrac{8 \pm \sqrt{48}}{8} = \begin{cases} x = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \text{ solución falsa} \\ x = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

b) $\sqrt{x + 4} + \sqrt{x - 1} = 5 \Rightarrow \sqrt{x + 4} = 5 - \sqrt{x - 1} \Rightarrow \left(\sqrt{x + 4}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x - 1}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 4 = 25 + x - 1 - 10\sqrt{x - 1} \Rightarrow 10\sqrt{x - 1} = 20 \Rightarrow \sqrt{x - 1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5$

c) $\sqrt{x - 7} + \sqrt{2x} = \sqrt{x + 1} \Rightarrow \left(\sqrt{x - 7} + \sqrt{2x}\right)^2 = \left(\sqrt{x + 1}\right)^2 \Rightarrow x - 7 + 2x + 2\sqrt{2x^2 - 14x} = x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{2x^2 - 14x} = 8 - 2x \Rightarrow \sqrt{2x^2 - 14x} = 4 - x \Rightarrow \left(\sqrt{2x^2 - 14x}\right)^2 = (4 - x)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - 14x = 16 + x^2 - 8x \Rightarrow x^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} + \dfrac{6 \pm 10}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 \text{ solución falsa} \\ x = -2 \text{ solución falsa} \end{cases}$ La ecuación no tiene solución.

2.15. Resuelve la ecuación $\sqrt[3]{x^2 - 1} + 1 = x$.

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} + 1 = x \Rightarrow \sqrt[3]{x^2 - 1} = x - 1 \Rightarrow x^2 - 1 = (x-1)^3 \Rightarrow (x-1)^3 + 1 - x^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^3 - (1+x)(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 1) \cdot [(x - 1)^2 - (1 + x)] = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x^2 - 3x) = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

2.16. Calcula el valor de un número tal que si se le suma una unidad y después se extrae la raíz cuadrada se obtiene el doble que al restarle 11 unidades y extraer la raíz cuadrada.

Número desconocido: x

$$\sqrt{x + 1} = 2\sqrt{x - 11} \Rightarrow \left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = \left(2\sqrt{x - 11}\right)^2 \Rightarrow x + 1 = 4(x - 11) \Rightarrow 3x = 45 \Rightarrow x = 15$$

2.17. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log 3x = \log 6 + 2\log x$

b) $\log(2x + 3) - \log(x - 2) = 2\log 2 + 2\log 3$

c) $\log\dfrac{2x - 2}{x} = 2\log(x - 1) - \log x$

d) $\log(4 - 5x) + \log(2x - 2) = \log(2x - x^2) + 1$

a) $\log 3x = \log 6 + 2\log x \Rightarrow \log 3x = \log(6 \cdot x^2) \Rightarrow 3x = 6x^2 \Rightarrow 3x(1 - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{solución falsa} \\ x = \dfrac{1}{2} & \text{solución verdadera} \end{cases}$

b) $\log(2x + 3) - \log(x - 2) = 2\log 2 + 2\log 3 \Rightarrow \log\dfrac{2x + 3}{x - 2} = \log(2^2 \cdot 3^2) \Rightarrow \dfrac{2x + 3}{x - 2} = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 3 = 36x - 72 \Rightarrow x = \dfrac{75}{34}$

c) $\log\dfrac{2x - 2}{x} = 2\log(x - 1) - \log x \Rightarrow \log[2(x - 1)] - \log x = 2\log(x - 1) - \log x \Rightarrow$

$\log 2 + \log(x - 1) = 2\log(x - 1) \Rightarrow \log(x - 1) = \log 2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$ Solución verdadera

d) $\log(4 - 5x) + \log(2x - 2) = \log(2x - x^2) + 1 \Rightarrow \log[(4 - 5x) \cdot (2x - 2)] = \log[10 \cdot (2x - x^2)] \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x - 8 - 10x^2 + 10x = 20x - 10x^2 \Rightarrow -2x = 8 \Rightarrow x = -4$ Solución falsa. La ecuación no tiene solución.

2.18. Calcula el valor de un número sabiendo que si se añade a su logaritmo decimal el valor del logaritmo decimal de 2, el resultado es la unidad.

Sea x el número desconocido. $\log x + \log 2 = 1 \Rightarrow \log 2x = \log 10 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$

2.19. Calcula el valor de un número sabiendo que el doble de su logaritmo decimal es igual a la suma de los logaritmos decimales de 4 y de 9.

Sea x el número desconocido. $2\log x = \log 4 + \log 9 \Rightarrow \log x^2 = \log 36 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{Solución verdadera} \\ x = -6 & \text{Solución falsa} \end{cases}$

2.20. Resuelve las ecuaciones exponenciales:

a) $\dfrac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}}$

b) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$

c) $13^{x^2 + 2x} - \dfrac{1}{13} = 0$

d) $2^{2x^2 - 3x - 5} = 16$

a) $\dfrac{1}{2^x} = 16^{\frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow 2^{-x} = 2^{4 \cdot \frac{x(x-1)}{2}} \Rightarrow -x = 2x(x - 1) \Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

b) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = 1$

c) $13^{x^2 + 2x} - \dfrac{1}{13} = 0 \Rightarrow 13^{x^2 + 2x} = 13^{-1} \Rightarrow x^2 + 2x = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

d) $2^{2x^2 - 3x - 5} = 16 \Rightarrow 2^{2x^2 - 3x - 5} = 2^4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = 0 \Rightarrow 2(x - 3)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$

2.21. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$

b) $2^{x+4} - 8^x = 0$

c) $3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1$

d) $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0$

e) $5^{2x} - 30 \cdot 5^{x-1} + 125 = 0$

f) $2 \cdot 10^{2x+4} + 3 \cdot 10^{x+2} - 5 = 0$

a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7 \Rightarrow 2^x\left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right) = 7 \Rightarrow 2^x \cdot \frac{7}{2} = 7 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

b) $2^{x+4} - 8^x = 0 \Rightarrow 2^{x+4} = \left(2^3\right)^x = 2^{3x} \Rightarrow x + 4 = 3x \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

c) $3^{2x} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 1 \Rightarrow \left(3^x\right)^2 - \frac{1}{3}3^x - 3 \cdot 3^x + 1 = 0$, tomando $z = 3^x \Rightarrow 3z^2 - 10z + 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} = \dfrac{10 \pm 8}{6} = \begin{cases} z = 3 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$ (deshaciendo el cambio) $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

d) $5^{x+3} - 5^{x-1} - 3120 = 0 \Rightarrow 5^x \cdot 5^3 - \frac{5^x}{5} - 3120 = 0 \Rightarrow \left(5^3 - \frac{1}{5}\right)5^x = 3120 \Rightarrow 5^x = \dfrac{3120 \cdot 5}{5^4 - 1} = 25 \Rightarrow x = 2$

e) $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Rightarrow \left(5^x\right)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \Rightarrow z^2 - 30z + 125 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = \dfrac{30 \pm \sqrt{900 - 500}}{2} = \dfrac{30 \pm 20}{2} = \begin{cases} z = 25 \\ z = 5 \end{cases} \Rightarrow$ (deshaciendo el cambio) $\begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

f) $2 \cdot 10^{2x+4} + 3 \cdot 10^{x+2} - 5 = 0 \Rightarrow 20000 \cdot \left(10^x\right)^2 + 300 \cdot 10^x - 5 = 0 \Rightarrow 20000z^2 + 300z - 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4000z^2 + 60z - 1 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-60 \pm 140}{8000} \Rightarrow \begin{cases} z = 10^{-2} \\ z = -0{,}025 \end{cases} \Rightarrow$ (deshaciendo el cambio) $\begin{cases} x = -2 \\ 10^x = -0{,}025, \text{ sin solución real} \end{cases}$

2.22. Resuelve los siguientes sistemas lineales.

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z = -14 \\ 5x - y - 2z = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = -1 \\ 3x - 3y + 2z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 2x - 2y - z = 8 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4x + y - 5z = 5 \\ 5x - y - z = 13 \\ 4x - 2y - 3z = 14 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ 3x - 3y + z = -14 \\ 5x - y - 2z = -15 \end{cases} \begin{matrix} \\ E_2 - 3E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ -9y + 7z = -20 \\ -11y + 8z = -25 \end{cases} 9E_3 - 11E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 2 \\ -9y + 7z = -20 \\ -5z = -5 \end{cases} \Rightarrow z = 1,\ y = 3,\ x = -2$

Solución única $(x = -2, \quad y = 3, \quad z = 1)$

b) $\begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ 3x - 3y - 2z = -1 \\ 3x - 3y + 2z = 5 \end{cases} \begin{matrix} 2E_2 - 3E_1 \\ E_3 - E_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y - z = 0 \\ -18y - z = -2 \\ 4z = 6 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{36},\ x = \frac{25}{36}$

Solución única $\left(x = \frac{25}{36}, \quad y = \frac{1}{36}, \quad z = \frac{3}{2}\right)$

c) $\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ 2x - 2y - z = 8 \\ x + y - z = 7 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - E_1 \\ 2E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ -3y = -3 \\ y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 1, \quad z = -2, \quad x = 4$

Solución única $(x = 4, \quad y = 1, \quad z = -2)$

d) $\begin{cases} 4x + y - 5z = 5 \\ 5x - y - z = 13 \\ 4x - 2y - 3z = 14 \end{cases} \begin{matrix} 4E_2 - 5E_1 \\ E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 5z = 5 \\ -9y + 21z = 27 \\ -3y + 2z = 9 \end{cases} 3E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 4x + y - 5z = 5 \\ -9y + 21z = 27 \\ -15z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0, \quad y = -3, \quad x = 2$

Solución única $(x = 2, \quad y = -3, \quad z = 0)$

2.23. Estudia el número de soluciones de los siguientes sistemas lineales, y en caso de que existan, hállalas.

a) $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \\ 5x - 5y + 4z = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 8x + y + z = -1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2y - z = -1 \\ 5x - y - 3z = 2 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \\ 5x - 5y + 4z = 8 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -5y + 7z = 4 \\ -10y + 14z = 8 \end{cases} \frac{E_3}{2} - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -5y + 7z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -5y + 7z = 4 \end{cases}$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} z = t \\ 5y = 7z - 4 = 7t - 4 \Rightarrow y = \dfrac{7t - 4}{5} \\ x = 2z - y = 2t - \dfrac{7t - 4}{5} = \dfrac{3t + 4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3t + 4}{5} \\ y = \dfrac{7t - 4}{5} \\ z = t \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ 8x + y + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z + 8x = -1 \\ -y + 3z + 3x = 0 \\ 2y - 2z + 5x = 0 \end{cases} \begin{matrix} E_2 + E_1 \\ E_3 - 2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y + z + 8x = -1 \\ 4z + 11x = -1 \\ -4z - 11x = 2 \end{cases} E_3 + E_2 \Rightarrow \begin{cases} y + z + 8x = -1 \\ 4z + 11y = -1 \\ 0 = 1 \end{cases}$

El sistema es incompatible. No tiene solución.

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - E_1 \\ E_3 - 2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -4y + 5z = 0 \\ -4y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ -4y + 5z = 0 \end{cases}$

Infinitas soluciones: $\begin{cases} y = t \\ 5z = 4y = 4t \Rightarrow z = \dfrac{4t}{5} \\ x = -3y + 2z = -3t + \dfrac{8t}{5} = -\dfrac{7t}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{7t}{5} \\ y = t \\ z = \dfrac{4t}{5} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2y - z = -1 \\ 5x - y - 3z = 2 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 5x - y - 3z = 2 \\ 2y - z = -1 \end{cases} E_2 - 5E_1 \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 4y - 13z = 12 \\ 2y - z = -1 \end{cases} 2E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -2 \\ 4y - 13z = 12 \\ 11z = -14 \end{cases}$

Sistema compatible determinado. Solución: $\begin{cases} x = -2 - \dfrac{25}{22} + \dfrac{28}{11} = -\dfrac{13}{22} \\ y = 3 - \dfrac{182}{44} = -\dfrac{25}{22} \\ z = -\dfrac{14}{11} \end{cases}$

2.24. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x + 3y^2 = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 5y = -8 \\ xy - 3x = -5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = 8 - 2x \\ 2x + 3(8 - 2x)^2 = 22 \end{cases} \Rightarrow 2x + 192 + 12x^2 - 96x = 22 \Rightarrow 6x^2 - 47x + 85 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{47 \pm 13}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = 5,\ y = -2 \\ x = \dfrac{17}{6},\ y = \dfrac{7}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \dfrac{-8 - 2x}{5} \\ x\left(\dfrac{-8 - 2x}{5}\right) - 3x = -5 \end{cases} \Rightarrow -8x - 2x^2 - 15x = -25 \Rightarrow 2x^2 + 23x - 25 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-23 \pm 27}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 1,\ y = -2 \\ x = -\dfrac{25}{2},\ y = \dfrac{17}{5} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ -y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y^2 = -1 \Rightarrow$ No tiene soluciones reales.

d) $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x^2 - (2x - 3)^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

2.25. Halla la solución de los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 32 \\ -3x^2 + 4y^2 = -48 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 = 32 & 3E_1 \\ -3x^2 + 4y^2 = -48 & 2E_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 + 9y^2 = 96 \\ -6x^2 + 8y^2 = -96 \end{cases} \Rightarrow 17y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4; \quad y = 0 \\ x = -4; \quad y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = -3 \\ x^2 + 2y^2 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{3}{y} \\ \dfrac{9}{y^2} + 2y^2 = 19 \end{cases} \Rightarrow 2y^4 - 19y^2 + 9 = 0 \Rightarrow y^2 = \dfrac{19 \pm 17}{4} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -3\sqrt{2};\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = 3\sqrt{2};\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ y^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = -1;\ y = 3 \\ x = 1;\ y = -3 \end{cases} \end{cases}$$

2.26. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones exponenciales.

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^x + 7^y = 16 \\ 3^{x-1} - 7^{y+2} = -340 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+2} + 5^{y+1} = 4 \end{cases} \Rightarrow -5E_1 + E_2 \Rightarrow 2^{x+2} - 5 \cdot 2^x = 4 - 45 \Rightarrow 2^x(2^2 - 5) = -41 \Rightarrow 2^x = 41 \Rightarrow x = \log_2 41 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 41 \\ 41 + 5^y = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 41 \\ 5^y = 9 - 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log_2 41 \\ 5^y = -32 \end{cases} \Rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones reales.

b) $\begin{cases} 3^x + 7^y = 16 \\ 3^{x-1} - 7^{y+2} = -340 \end{cases} \Rightarrow E_1 - 3E_2 \Rightarrow 7^y + 3 \cdot 7^{y+2} = 16 + 3 \cdot 340 \Rightarrow 7^y(1 + 3 \cdot 7^2) = 1036 \Rightarrow$

$\Rightarrow 148 \cdot 7^y = 1036 \Rightarrow 7^y = \dfrac{1036}{148} = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \begin{cases} 3^x + 7 = 16 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

2.27. Encuentra la solución de los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicas.

a) $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \log x + 3\log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases} \Rightarrow \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = 3 \Rightarrow x = 10^3 y \Rightarrow \begin{cases} \log(10^3 y) + \log(y^3) = 5 \\ x = 10^3 y \end{cases} \Rightarrow \log(10^3 y^4) = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^3 y^4 = 10^5 \Rightarrow y^4 = 10^2 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{10} \\ x = 10^3\sqrt{10} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 64 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \log\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 \Rightarrow x = 10y \Rightarrow \begin{cases} 30y + 2y = 64 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32y = 64 \\ x = 10y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 20 \end{cases}$

2.28. Comprueba si los números reales indicados pertenecen a la solución de las inecuaciones correspondientes.

a) $x = -2$ de la inecuación $x^3 + x^2 + x \leqslant 6$

b) $x = \dfrac{1}{e}$ de la inecuación $x + \ln x \geqslant 0$

c) $x = -0{,}5$ de la inecuación $2^x + x - 2 < 3^x$

a) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $(-2)^3 + (-2)^2 - 2 = -8 + 4 - 2 = -6 \leqslant 6$.

b) No forma parte de la solución de la inecuación, ya que $\dfrac{1}{e} + \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} - 1 = \dfrac{1 - e}{e} < 0$.

c) Sí forma parte de la solución de la inecuación, ya que $2^{-0,5} - 0{,}5 - 2 - 3^{-0,5} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 2{,}5 - \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 0$.

2.29. Resuelve las inecuaciones de primer grado:

a) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-2}{8} \leqslant \dfrac{x}{2}$ b) $2x - 3 - \dfrac{x}{2} > x + \dfrac{3x+1}{6}$ c) $x + 2(x+1) + 3(x+2) < \dfrac{x+38}{2}$

a) $\dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-2}{8} \leqslant \dfrac{x}{2} \Rightarrow 4x - 12 - x + 2 \leqslant 4x \Rightarrow -x \leqslant 10 \Rightarrow x \geqslant -10 \Rightarrow$ Solución: $[-10, +\infty)$

b) $2x - 3 - \dfrac{x}{2} > x + \dfrac{3x+1}{6} \Rightarrow 12x - 18 - 3x > 6x + 3x + 1 \Rightarrow 0 > 19 \Rightarrow$ La inecuación no tiene solución.

c) $x + 2(x+1) + 3(x+2) < \dfrac{x+38}{2} \Rightarrow 2x + 4x + 4 + 6x + 12 < x + 38 \Rightarrow 11x < 22 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ Solución: $(-\infty, 2)$

2.30. Halla la solución de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $-2x^2 + 3x > 0$
b) $3x^2 + x - 24 \geqslant 0$
c) $x^3 - 4x > 0$
d) $x^3 + x^2 - x - 1 \leqslant 0$
e) $3x \cdot (2x - 1) + x^2 \geqslant 5x - 1$
f) $-x^3 - 2x^2 - x \leqslant 0$
g) $x^4 - 1 \geqslant 0$
h) $(x - 1)(x + 4) < -6$

En la mayoría de los casos se obtiene la solución a partir de la tabla de signos de los factores de los polinomios:

a) $-2x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x(-2x+3) \quad 0$

$-\infty \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad +\infty$

x	−	+	+
$-2x+3$	+	+	−
polinomio	−	+	−

Solución: $x \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

b) $3x^2 + x - 24 \geqslant 0 \Rightarrow (x+3)(3x-8) \geqslant 0$

$-\infty \quad -3 \quad \frac{8}{3} \quad +\infty$

$x+3$	−	+	+
$3x-2$	−	−	+
polinomio	+	−	+

Solución: $x \in (-\infty, -3] \cup \left[\dfrac{8}{3}, +\infty\right)$

c) $x^3 - 4x > 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) > 0$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad +\infty$

$x+2$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	+
polinomio	−	+	−	+

Solución: $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$

d) $x^3 + x^2 - x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)^2 \leqslant 0 \Rightarrow (x-1) \leqslant 0$ ya que el factor $(x+1)^2$ es siempre positivo excepto para $x = -1$, por tanto la solución es $x \leqslant 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in (-\infty, 1]$.

(En esta solución está incluido el punto $x = -1$, para el que el polinomio también se anula.)

e) $3x \cdot (2x - 1) + x^2 \geqslant 5x - 1 \Rightarrow 7x^2 - 8x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-1)(7x-1) \geqslant 0$

$-\infty \quad \frac{1}{7} \quad 1 \quad +\infty$

$x-1$	−	−	+
$7x-1$	−	+	+
polinomio	+	−	+

Solución: $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{7}\right] \cup [1, +\infty)$

f) $-x^3 - 2x^2 - x \leqslant 0 \Rightarrow -x(x+1)^2 \leqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \{x = -1\} \cup \{x \geqslant 0\}$
ya que el factor $(x+1)^2$ es siempre positivo excepto para $x = -1$, por tanto la solución es $x \in \{-1\} \cup [0, +\infty)$.

g) $x^4 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) \geqslant 0$
Como $x^2 + 1$ es siempre positivo, basta considerar los otros dos factores:

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$

$x+1$	−	+	+
$x-1$	−	−	+
polinomio	+	−	+

Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

h) $(x-1)(x+4) < -6 \Rightarrow (x+1)(x+2) < 0$

$-\infty \quad -2 \quad -1 \quad +\infty$

$x+2$	−	+	+
$x+1$	−	−	+
polinomio	+	−	+

Solución: $x \in (-2, -1)$

2.31. Resuelve las inecuaciones racionales siguientes.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geqslant 0$ c) $\dfrac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0$ e) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geqslant 0$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geqslant 0$ d) $\dfrac{x^3}{x^2-9} \geqslant 0$ f) $\dfrac{2x+3}{x^3+1} \geqslant 0$

De nuevo las soluciones se obtienen utilizando la tabla de signos de los factores. Hay que recordar que las raíces de los denominadores nunca pueden pertenecer a la solución mientras que las de los numeradores pertenecen si la desigualdad incluye el signo igual.

a) $\dfrac{5x-2}{2x+1} \geqslant 0$

	$-\infty$ … $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ … $\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$ … $+\infty$
$2x+1$	−	+	+
$5x-2$	−	−	+
fracción	+	−	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left[\dfrac{2}{5}, +\infty\right)$

b) $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} \geqslant 0$

	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x+2$	−	+	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+	+
$x-2$	−	−	−	−	+
fracción	+	−	+	−	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, +\infty)$

c) $\dfrac{4x-5}{4x^2-x-5} < 0 \Rightarrow \dfrac{4x-5}{(4x-5)(x+1)} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x+1} < 0$, si $x \neq \dfrac{5}{4} \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

Por tanto la solución es $x \in (-\infty, -1)$

d) $\dfrac{x^3}{x^2-9} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{x^3}{(x-3)(x+3)} \geqslant 0$

	$-\infty$ … -3	-3 … 0	0 … 3	3 … $+\infty$
$x+3$	−	+	+	+
x^3	−	−	+	+
$x-3$	−	−	−	+
fracción	−	+	−	+

Solución: $x \in (-3, 0] \cup (3, +\infty)$

e) $\dfrac{x^2+4x-5}{x^3-x} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \geqslant 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{x+5}{x(x+1)} \geqslant 0$, si $x \neq 1$. Se halla ahora la solución:

	$-\infty$ … -5	-5 … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$x+5$	−	+	+	+
$x+1$	−	−	+	+
x	−	−	−	+
fracción	−	+	−	+

Solución: $x \in [-5, -1) \cup (0, +\infty) - \{1\}$

Hay que excluir el valor 1 de la solución porque la expresión no está definida para él.

f) $\dfrac{2x+3}{x^3+1} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{(x+1)(x^2-x+1)} \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{2x+3}{x+1} \geqslant 0,$

ya que el factor $x^2 - x + 1$ es siempre positivo.

	$-\infty$ … $-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$ … -1	-1 … $+\infty$
$2x+3$	−	+	+
$x+1$	−	−	+
fracción	+	−	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup (-1, +\infty)$

EJERCICIOS

Polinomios

2.32. Calcula el valor numérico de cada polinomio en los puntos $x = 2$ y $x = -0{,}15$.

a) $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3$ b) $P(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{3}{4}x - 2$

a) $P(2) = 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 3 = 16 + 8 - 3 = 21$

$P(-0{,}15) = (-0{,}15)^4 + 2 \cdot (-0{,}15)^2 - 3 \approx -2{,}95$

b) $P(2) = \dfrac{1}{3}2^3 + \dfrac{2}{5}2^2 - \dfrac{3}{4}2 - 2 = \dfrac{8}{3} + \dfrac{8}{5} - \dfrac{3}{2} - 2 = \dfrac{23}{30}$

$P(-0{,}15) = \dfrac{1}{3}(-0{,}15)^3 + \dfrac{2}{5}(-0{,}15)^2 - \dfrac{3}{4}(-0{,}15) - 2 \approx -1{,}88$

2.33. Simplifica las siguientes expresiones polinómicas.

a) $2(3x-2)^2-3(3x+2)^2-2(3x-2)(3x+2)$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)$

c) $(2x^2-2x-1)(3x^2-2x)-3x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}$

f) $(x^2+4)(x^2-4)(x-2)+2x(x^3+8)$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)$

a) $2(3x-2)^2-3(3x+2)^2-2(3x-2)(3x+2)=2(9x^2+4-12x)-3(9x^2+4+12x)-2(9x^2-4)=$
$=18x^2+8-24x-27x^2-12-36x-18x^2+8=-27x^2-60x+4$

b) $(3x+2)^2+2(2x-3)^2-(2x-5)(x-5)=9x^2+4+12x+2(4x^2+9-12x)-(2x^2-10x-5x+25)=$
$=9x^2+4+12x+8x^2+18-24x-2x^2+10x+5x-25=15x^2+3x-3$

c) $(2x^2-2x-1)(3x^2-2x)-3x=6x^4-4x^3-6x^3+4x^2-3x^2+2x-3x=6x^4-10x^3+x^2-x$

d) $(2x^2-3x+2)(-3x^2+x+1)+(6x-10)x^3=-6x^4+2x^3+2x^2+9x^3-3x^2-3x-6x^2+2x+2+6x^4-10x^3=$
$=x^3-7x^2-x+2$

e) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{2}{5}\right)+\frac{6}{25}=x^3-\frac{9}{10}x^2+\frac{4}{15}x-\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=x^3-\frac{9}{10}x^2+\frac{4}{15}x$

f) $(x^2+4)(x^2-4)(x-2)+2x(x^3+8)=(x^4-16)(x-2)+2x^4+16x=x^3-16x-2x^4+32+2x^4+16x=x^3+32$

g) $(x^3+2x^2+3x+4)(5x-2)=5x^4+10x^3+15x^2+20x-2x^3-4x^2-6x-8=5x^4+8x^3+11x^2+14x-8$

2.34. Demuestra esta igualdad algebraica. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$

$(x+y+x)^2=(x+y+z)(x+y+z)=x^2+xy+xz+yx+y^2+yz+zx+zy+z^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)$

2.35 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(6x^4+7x^3-5x^2-6x-6):(3x^2+2x+1)$

b) $(6x^5-7x^3-x^2+11x-8):(3x^2+x-2)$

c) $(6x^5-10x^4-15x^3-7x^2+3):(4x^2-4x-4)$

a) Cociente: $2x^2+x-3$. Resto: $-x-3$

b) Cociente: $2x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{11}{9}x-\frac{8}{27}$. Resto: $\frac{371}{27}x-\frac{232}{27}$

c) Cociente: $\frac{3}{2}x^3-x^2-\frac{13}{4}x-6$. Resto: $-37x-21$

2.36 Aplica la regla de Ruffini para resolver las siguientes divisiones.

a) $(-3x^3+2x^2+x-3):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b) $(2x^4+2x^3+2x^2-2):(-x+3)$

c) $(x^5+2x^3-2x-1):(2x+4)$

d) $(x^5+3x^4-3x^3-x^2-4x+2):(2x+4)$

e) $(-2x^4-x^3-2x^2+x+1):(2x-3)$

a) Cociente: $-3x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{4}$. Resto: $-\frac{21}{8}$.

b) Cociente: $-2x^3-8x^2-26x-78$. Resto: 232.

c) Cociente: $\frac{1}{2}x^4-x^3+3x^2-6x+11$. Resto: -45

d) Cociente: $\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{2}x-11$. Resto: 46

e) Cociente: $-x^3-2x^2-4x-\frac{11}{2}$. Resto: $-\frac{31}{2}$

2.37. Considera la expresión algebraica: $T = (9x^2 - 4)^2 - (3x + 2)^2$

a) Desarrolla y ordena la expresión T según las potencias decrecientes de x.

b) Escribe la expresión obtenida como un producto de factores de primer grado.

c) Calcula el valor numérico de T para: $x = 0 \quad x = \frac{1}{3} \quad x = 1$

a) y b) $(9x^2 - 4 + 3x + 2)(9x^2 - 4 - 3x - 2) = (9x^2 + 3x - 2)(9x^2 - 3x - 6) = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)9(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) =$
$= 3(x - 1)(3x - 1)(3x + 2)^2 = 81x^4 - 81x^2 - 12x + 12$

c) Para $x = 0$, $T = 12$; para $x = \frac{1}{3}$, $T = 0$; para $x = 1$, $T = 0$

2.38. Determina, si existen, las raíces enteras de cada uno de los siguientes polinomios y factorízalos.

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

c) $P(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 3$

d) $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6$

e) $P(x) = x^4 - 4x^2$

f) $P(x) = 6x^5 + 11x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x$

g) $P(x) = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$

h) $P(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{16}$

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$. Las raíces enteras son $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

b) $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x + 3)(x - 1)^2$. Las raíces enteras son $x = 1$ y $x = -3$.

c) $P(x) = 2x^4 - x^3 - 5x^2 + x + 3 = (x - 1)(x + 1)^2(2x - 3)$. Las raíces enteras son $x = 1$ y $x = -1$.

d) $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6 = (x - 2)(4x^2 + 4x - 3)$

$4x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{2} x = -\frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 + 4x - 3 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (2x - 1)(2x + 3)$

Por tanto: $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 11x + 6 = (x - 2)(2x - 1)(2x + 3)$. La única raíz entera es $x = 2$.

e) $P(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$. Las raíces enteras son $x = 0$, $x = 2$ y $x = -2$.

f) $P(x) = 6x^5 + 11x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x \Rightarrow P(x) = x(6x^4 + 11x^3 + 3x^2 - 3x - 1)$. La única raíz entera es $x = 0$.

g) $P(x) = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)(x^2 + 1)$. Las raíces enteras son $x = \pm 1$ y $x = \pm 2$.

h) $P(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{16} = \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\right)^2$. El polinomio no tiene raíces enteras.

2.39. En cada caso, calcula el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios dados.

a) $P(x) = x^2 + x - 2$ y $Q(x) = x^2 + 2x - 3$

b) $P(x) = 2x^2 - 2$ y $Q(x) = 4x - 4$

c) $P(x) = x - 1 \quad Q(x) = 2x + 2 \quad R(x) = 3x^2 - 3$

d) $P(x) = x^2(x - 2) \quad Q(x) = x \cdot (x^2 - 4) \quad R(x) = x^3 - 2x^2$

a) $\left.\begin{array}{l} P(x) = (x - 1)(x + 2) \\ Q(x) = (x - 1)(x + 3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}\{P(x) \quad Q(x)\} = x - 1 \\ \text{m.c.m.}\{P(x) \quad Q(x)\} = (x - 1)(x + 2)(x + 3) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{l} P(x) = 2(x - 1)(x + 1) \\ Q(x) = 4(x - 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}\{P(x) \quad Q(x)\} = 2(x - 1) = 2x - 2 \\ \text{m.c.m.}\{P(x) \quad Q(x)\} = 4(x - 1)(x + 1) = 4x^2 - 4 \end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{l} P(x) = (x - 1) \\ Q(x) = 2(x + 1) \\ R(x) = 3(x - 1)(x + 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}\{P(x) \quad Q(x)\} = 1 \\ \text{m.c.m.}\{P(x) \quad Q(x)\} = 6(x - 1)(x + 1) = 6x^2 - 6 \end{array}\right.$

d) $\left.\begin{array}{l} P(x) = x^2(x - 2) \\ Q(x) = x(x - 2)(x + 2) \\ R(x) = x^2(x - 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{m.c.d.}\{P(x) \quad Q(x)\} = x(x - 2) = x^2 - 2x \\ \text{m.c.m.}\{P(x) \quad Q(x)\} = x^2(x - 2)(x + 2) = x^4 - 4x^2 \end{array}\right.$

Fracciones algebraicas

2.40. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$ c) $\dfrac{x^4 - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$ e) $\dfrac{xy - 3y + x - 3}{xy - 3y}$

b) $\dfrac{-2x^4 + 5x^3 - 5x + 2}{2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4}$ d) $\dfrac{x^3 - y^3}{(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)}$

a) $\dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x+3)(x-2)^2} = \dfrac{x-1}{x+3}$

b) $\dfrac{-2x^4 + 5x^3 - 5x + 2}{2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 8x - 4} = \dfrac{-(x+1)(x-1)(x-2)(2x-1)}{(x-1)(x+2)^2(2x+1)} =$

$= -\dfrac{(x+1)(x-2)(2x-1)}{(x+2)^2(2x+1)} = \dfrac{-2x^3 + 3x^2 + 3x - 2}{2x^3 + 9x^2 + 12x + 4}$

c) $\dfrac{x^4 - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1} = \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x-1)^2(x^2+1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

d) $\dfrac{x^3 - y^3}{(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)} = \dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)} = \dfrac{1}{x+y}$

e) $\dfrac{xy - 3y + x - 3}{xy - 3y} = \dfrac{x(y+1) - 3(y+1)}{y(x-3)} = \dfrac{(y+1)(x-3)}{y(x-3)} = \dfrac{y+1}{y}$

2.41. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica los resultados al máximo.

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1} + \dfrac{x^2}{x+1}$ b) $\dfrac{x}{x-5} - \dfrac{2x-1}{x+5} - \dfrac{50}{x^2-25}$ c) $\dfrac{2x^2-x}{x+3} + \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{12x}{9-x^2}$ d) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{3x-10}{x^2-6x+8} - \dfrac{2x-7}{x-4}$

a) $\dfrac{x^2+1}{x^2+2x+1} + \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} + \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{x^2 + 1 + x^3 + x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{(x+1)^2}$

b) $\dfrac{x}{x-5} - \dfrac{2x-1}{x+5} - \dfrac{50}{x^2-25} = \dfrac{x^2 + 5x - (2x-1)(x-5) - 50}{(x-5)(x+5)} =$

$= \dfrac{x^2 + 5x - 2x^2 + 10x + x - 5 - 50}{(x+5)(x-5)} = \dfrac{-x^2 + 16x - 55}{(x-5)(x+5)} = \dfrac{-(x-11)(x-5)}{(x-5)(x+5)} = \dfrac{11-x}{x+5}$

c) $\dfrac{2x^2-x}{x+3} + \dfrac{2x}{x-3} + \dfrac{12x}{9-x^2} = \dfrac{(2x^2-x)(x-3) + 2x(x+3) - 12x}{(x+3)(x-3)} =$

$= \dfrac{2x^3 - 6x^2 - x^2 + 3x + 2x^2 + 6x - 12x}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 3x}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{x(x-3)(2x+1)}{(x-3)(x+3)} = \dfrac{2x^2 + x}{x+3}$

d) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{3x-10}{x^2-6x+8} - \dfrac{2x-7}{x-4} = \dfrac{(x-4)(x-2) + (x-3)(3x-10) - (2x-7)(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-2)} =$

$= \dfrac{2x^3 + 21x^2 - 72x + 80}{(x-3)(x-4)(x-2)}$

2.42. Realiza los siguientes productos y cocientes de fracciones algebraicas y simplifica todo lo que puedas los resultados.

a) $\dfrac{x^2-1}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-4}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-9}{x+2}$ b) $\dfrac{3x^2y}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)}$ c) $\dfrac{x^3-x}{2x-4} : \dfrac{4x+4}{3x-6}$ d) $\dfrac{1}{x-y} : \dfrac{1}{x^2+y^2-2xy}$

a) $\dfrac{x^2-1}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-4}{x-1} \cdot \dfrac{x^2-9}{x+2} = \dfrac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-1)(x+2)} = (x+1)(x-2)(x-3) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

b) $\dfrac{3x^2y}{x-y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{6xy^2(x+y)} = \dfrac{3x^2y(x-y)(x+y)}{(x-y)6xy^2(x+y)} = \dfrac{x}{2y}$

c) $\dfrac{x^3-x}{2x-4} : \dfrac{4x+4}{3x-6} = \dfrac{x(x-1)(x+1)\,3(x-2)}{2(x-2)\,4(x+1)} = \dfrac{3x(x-1)}{8} = \dfrac{3x^2-3x}{8}$

d) $\dfrac{1}{x-y} : \dfrac{1}{x^2+y^2-2xy} = \dfrac{(x-y)^2}{x-y} = x - y$

2.43. Opera y simplifica.

a) $\frac{1}{xy} + \frac{a}{xz} + \frac{a^2}{yz}$

b) $\left(x + \frac{(x-1)^2}{2-x}\right) \cdot \frac{2-x}{2}$

c) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}}$

d) $\frac{x - \frac{x^2}{x-y}}{y - \frac{y^2}{x+y}}$

e) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2-b^2}$

f) $(a^2 - b^2) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

g) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x+1}} : \frac{x+1}{x+2}$

h) $\frac{1 + \frac{x-2}{x+2}}{\frac{x+2}{x-2} - 1}$

a) $\frac{1}{xy} + \frac{a}{xz} + \frac{a^2}{yz} = \frac{z + ay + a^2x}{xyz}$

b) $\left(x + \frac{(x-1)^2}{2-x}\right) . \frac{2-x}{2} = \frac{2x - x^2 + x^2 + 1 - 2x}{2-x} \cdot \frac{2-x}{2} = \frac{1}{2-x} \cdot \frac{2-x}{2} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{(x+1) \cdot x^2}{x \cdot (x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1}$

d) $\frac{x - \frac{x^2}{x-y}}{y - \frac{y^2}{x+y}} = \frac{\frac{x^2 - xy - x^2}{x-y}}{\frac{yx + y^2 - y^2}{x+y}} = \frac{-xy(x+y)}{yx(x-y)} = \frac{y+x}{y-x}$

e) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} + \frac{a^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - b^2 + 2ab + a^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{4ab + a^2}{(a-b)(a+b)} = \frac{4ab + a^2}{a^2 - b^2}$

f) $(a^2 - b^2) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(a-b)(a+b) \cdot ab}{a+b} = a^2b - ab^2$

g) $\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x+1}} : \frac{x+1}{x+2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)(x+2)}{\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)(x+1)} = \frac{\frac{(x+1)(x+2)}{x}}{\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}} = \frac{x+1}{x}$

h) $\frac{1 + \frac{x-2}{x+2}}{\frac{x+2}{x-2} - 1} = \frac{\frac{x+2+x-2}{x+2}}{\frac{x+2-x+2}{x-2}} = \frac{2x(x-2)}{4(x+2)} = \frac{x^2 - 2x}{2x+4}$

Ecuaciones polinómicas

2.44. Resuelve estas ecuaciones de primer grado.

a) $2x - 2(3x - 1) + 4(2x - 5) - 10 = 8x$

b) $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{3}$

c) $\frac{3x-1}{4} - 2x = \frac{2x - \frac{7}{4}}{2} - (3x - 1)$

d) $\frac{x+10}{2} + \frac{2(x-2)}{5} = \frac{5x-15}{3}$

e) $\frac{2x}{3} - \frac{x-2}{12} + \frac{x+3}{2} = 2x - \frac{1}{6}$

a) $2x - 2(3x - 1) + 4(2x - 5) - 10 = 8x \Rightarrow 2x - 6x + 2 + 8x - 20 - 10 = 8x \Rightarrow -4x = 28 \Rightarrow x = -7$

b) $2x - \frac{3x-1}{3} = x + \frac{1}{3} \Rightarrow 6x - 3x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ Todos los números reales son solución.

c) $\frac{3x-1}{4} - 2x = \frac{2x - \frac{7}{4}}{2} - (3x - 1) \Rightarrow 3x - 1 - 8x = 4x - \frac{7}{2} - 12x + 4 \Rightarrow 3x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

d) $\frac{x+10}{2} + \frac{2(x-2)}{5} = \frac{5x-15}{3} \Rightarrow 15x + 150 + 12x - 24 = 50x - 150 \Rightarrow -23x = -276 \Rightarrow x = 12$

e) $\frac{2x}{3} - \frac{x-2}{12} + \frac{x+3}{2} = 2x - \frac{1}{6} \Rightarrow 8x - x + 2 + 6x + 18 = 24x - 2 \Rightarrow 11x = 22 \Rightarrow x = 2$

2.45. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas

a) $4x^2 - 7x - 2 = 0$

b) $-7x^2 + 12x - 5 = 0$

c) $x(2x - 1) - 3x(x + 1) = 0$

d) $\dfrac{x(x-1)}{15} + \dfrac{(x-6)^2}{5} + \dfrac{(x+2)^2}{3} = \dfrac{(3x-2)(3x-4)}{15}$

e) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$

f) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0$

g) $x^4 - 125x^2 + 484 = 0$

a) $4x^2 - 7x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8} = \dfrac{7 \pm 9}{8} \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{1}{4}$

b) $-7x^2 + 12x - 5 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 - 140}}{-14} = \dfrac{-12 \pm 2}{-14} \Rightarrow x = \dfrac{5}{7},\ x = 1$

c) $x(2x - 1) - 3x(x + 1) = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 3x^2 - 3x = 0 \Rightarrow -x^2 - 4x = 0 \Rightarrow -x(x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -4$

d) $x^2 - x + 3(x^2 + 36 - 12x) + 5(x^2 + 4 + 4x) = 9x^2 - 18x + 8 \Rightarrow 9x^2 - 17x + 128 = 9x^2 - 18x + 8 \Rightarrow x = -120$

e) $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 3)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = -2,\ x = 3$

f) $6x^3 - 7x^2 - 14x + 15 = 0 \Rightarrow (x - 1)(6x^2 - x - 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 6x^2 - x - 15 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{2},\ x = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

g $x^4 - 125x^2 + 484 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{125 \pm 117}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 121 \Rightarrow x = 11,\ x = -11 \\ x^2 = 4 \Rightarrow x = 2,\ x = -2 \end{cases}$

Ecuaciones racionales y con radicales

2.46. Resuelve las ecuaciones racionales siguientes.

a) $x + 2 + \dfrac{2}{x} = -1$

b) $2x - \dfrac{12}{2 - x} = 7 + \dfrac{11x + 11}{9}$

c) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x + 2} = 3$

d) $\dfrac{x + 9}{x} - \dfrac{5 + x}{x + 2} = \dfrac{12x + 12}{x^2 + 2x}$

e) $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x + a} = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$

f) $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{4x + 12}{3x + 3}$

g) $\dfrac{x + 2}{x + 1} - \dfrac{x + 1}{x + 2} = \dfrac{9}{20}$

h) $\dfrac{x^2 + 1}{x} + \dfrac{x}{x^2 - 1} = x + \dfrac{7}{6}$

a) $x + 2 + \dfrac{2}{x} = -1 \Rightarrow x^2 + 2x + 2 = -x \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = -1,\ x = -2$

b) $2x - \dfrac{12}{2 - x} = 7 + \dfrac{11x + 11}{9} \Rightarrow 9(2 - x) \cdot 2x - 12 \cdot 9 = 7 \cdot 9(2 - x) + (2 - x) \cdot (11x + 11) \Rightarrow$

$\Rightarrow 36x - 18x^2 - 108 = 126 - 63x + 22x + 22 - 11x^2 - 11x \Rightarrow 7x^2 - 88x + 256 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{88 \pm 24}{14} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \dfrac{32}{7} \end{cases}$

c) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x + 2} = 3 \Rightarrow 4x + 8 + 4x = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm 10}{6} \Rightarrow x = 2,\ x = -\dfrac{4}{3}$

d) $\dfrac{x+9}{x} - \dfrac{5+x}{x+2} = \dfrac{12x+12}{x^2+2x} \Rightarrow (x+9)(x+2) - x(5+x) = 12x + 12 \Rightarrow x^2 + 11x + 18 - 5x - x^2 = 12x + 12 \Rightarrow x = 1$

e) $\dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{x + a} = \dfrac{1}{x^2 + a^2} \Rightarrow x + a + x - a = 1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

f) $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{4x + 12}{3x + 3} \Rightarrow 3x^2 + 3x + 3x + 3 = 4x^2 + 12x - 4x - 12 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm 8}{2} \Rightarrow x = 3,\ x = -5$

g) $\dfrac{x + 2}{x + 1} - \dfrac{x + 1}{x + 2} = \dfrac{9}{20} \Rightarrow 20(x + 2)^2 - 20(x + 1)^2 = 9(x + 1)(x + 2) \Rightarrow 9x^2 - 13x - 42 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{13 \pm 41}{18} \Rightarrow x = 3,\ x = -\dfrac{14}{9}$

h) $\dfrac{x^2 + 1}{x} + \dfrac{x}{x^2 - 1} = x + \dfrac{7}{6} \Rightarrow 6(x^2 + 1)(x^2 - 1) + 6x^2 = 6x^2(x^2 - 1) + 7x(x^2 - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^4 - 6 + 6x^2 = 6x^4 - 6x^2 + 7x^3 - 7x \Rightarrow 7x^3 - 12x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x - 2)(7x^2 + 2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{88}}{14} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{22}}{7} \end{cases}$

2.47. Resuelve estas ecuaciones con radicales:

a) $2 - 3\sqrt{x} = -x$

b) $3x + \sqrt{2x - 2} = 2\sqrt{2x - 2} + 23$

c) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 5$

d) $3\sqrt{3x - 1} = 2\sqrt{3(2x - 1)}$

e) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x} = \sqrt{7x - 3}$

f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x - 5}} = \dfrac{4 - \sqrt{x - 5}}{\sqrt{x - 5}}$

a) $2 - 3\sqrt{x} = -x \Rightarrow 3\sqrt{x} = 2 + x \Rightarrow \left(3\sqrt{x}\right)^2 = (2 + x)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

b) $3x + \sqrt{2x - 2} = 2\sqrt{2x - 2} + 23 \Rightarrow 3x - 23 = \sqrt{2x - 2} \Rightarrow (3x - 23)^2 = \left(\sqrt{2x - 2}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2 + 529 - 138x = 2x - 2 \Rightarrow 9x^2 - 140x + 531 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{140 \pm 22}{18} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = \dfrac{59}{9} \text{ solución falsa} \end{cases}$

c) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 5 \Rightarrow \sqrt{x + 1} = 5 - \sqrt{2x + 3} \Rightarrow \left(\sqrt{x + 1}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{2x + 3}\right)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 1 = 25 + 2x + 3 - 10\sqrt{2x + 3} \Rightarrow 10\sqrt{2x + 3} = x + 27 \Rightarrow \left(10\sqrt{2x + 3}\right)^2 = (x + 27)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 146x + 429 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{146 \pm 140}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 143 \text{ solución falsa} \\ x = 3 \end{cases}$

d) $3\sqrt{3x - 1} = 2\sqrt{3(2x - 1)} \Rightarrow \left(3\sqrt{3x - 1}\right)^2 = \left(2\sqrt{3(2x - 1)}\right)^2 \Rightarrow 9(3x - 1) = 4 \cdot 3(2x - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$, solución falsa.

e) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x} = \sqrt{7x - 3} \Rightarrow \left(\sqrt{x + 5} + \sqrt{x}\right)^2 = \left(\sqrt{7x - 3}\right)^2 \Rightarrow x + 5 + x + 2\sqrt{x^2 + 5x} = 7x - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sqrt{x^2 + 5x} = 5x - 8 \Rightarrow \left(2\sqrt{x^2 + 5x}\right)^2 = (5x - 8)^2 \Rightarrow 21x^2 - 100x + 64 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{100 \pm 68}{42} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \dfrac{16}{21} \text{ solución falsa} \end{cases}$

f) $\dfrac{2\sqrt{x}}{4 + \sqrt{x - 5}} = \dfrac{4 - \sqrt{x - 5}}{\sqrt{x - 5}} \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - 5x} = 16 - (x - 5) \Rightarrow 2\sqrt{x^2 - 5x} = 21 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2\sqrt{x^2 - 5x}\right)^2 = (21 - x)^2 \Rightarrow 4x^2 - 20x = 441 + x^2 - 42x \Rightarrow 3x^2 + 22x - 441 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-22 \pm 76}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -\dfrac{49}{3} \text{ solución falsa} \end{cases}$

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

2.48. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $2\log(2x - 2) - \log(x - 1) = 1$

b) $\log(65 - x^3) = 3\log(5 - x)$

c) $\log x = \log 6 + 2\log\dfrac{x}{3}$

d) $\log 10^{\sqrt{20x + 320}} = 10\sqrt{x}$

e) $3\log_x 2 + \log_x 4 = -5$

f) $\log\sqrt{7x + 51} - 1 = \log 9 - \log\sqrt{2x + 67}$

a) $2\log(2x - 2) - \log(x - 1) = 1 \Rightarrow \log\dfrac{(2x - 2)^2}{x - 1} = \log 10 \Rightarrow \dfrac{(2x - 2)^2}{x - 1} = 10 \Rightarrow \dfrac{4(x - 1)^2}{x - 1} = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x - 1) = 10 \Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$

b) $\log(65 - x^3) = 3\log(5 - x) \Rightarrow \log(65 - x^3) = \log(5 - x)^3 \Rightarrow 65 - x^3 = (5 - x)^3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 65 - x^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3 \Rightarrow 15x^2 - 75x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$

c) $\log x = \log 6 + 2\log\dfrac{x}{3} \Rightarrow \log x = \log\left(6 \cdot \left(\dfrac{x}{3}\right)^2\right) \Rightarrow x = \dfrac{6x^2}{9} \Rightarrow 6x^2 = 9x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x(2x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ solución falsa} \\ x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

d) $\log 10^{\sqrt{20x + 320}} = 10\sqrt{x} \Rightarrow 10^{10\sqrt{x}} = 10^{\sqrt{20x + 320}} \Rightarrow 10\sqrt{x} = \sqrt{20x - 320} \Rightarrow 100x = 20x + 320 \Rightarrow x = \dfrac{320}{80} = 4$

e) $3\log_x 2 + \log_x 4 = -5 \Rightarrow \log_x(8 \cdot 4) = -5 \Rightarrow x^{-5} = 32 = 2^5 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

f) $\log\sqrt{7x + 51} - 1 = \log 9 - \log\sqrt{2x + 67} \Rightarrow \log\dfrac{\sqrt{7x + 51}}{10} = \log\dfrac{9}{\sqrt{2x + 67}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{7x + 51}}{10} = \dfrac{9}{\sqrt{2x + 67}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x^2 + 571x + 3419 = 8100 \Rightarrow 14x^2 + 571x - 4683 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-571 \pm 767}{28} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -\dfrac{669}{14} \text{ solución falsa} \end{cases}$

2.49. Resuelve estas ecuaciones exponenciales.

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144$

c) $9^x + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

d) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90$

e) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111$

f) $2^{2x-4} - 5 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0$

g) $9^{x+2} + 3^{x+3} - 810 = 0$

h) $\sqrt[x]{27} = 3^{x+2}$

a) $4^{x^2+1} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2^{2(x^2+1)} = 2^{5x+5} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x + 5 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow x = 3,\ x = -\dfrac{1}{2}$

b) $4^{(x-2)^2} = 262\,144 \Rightarrow 4^{(x-2)^2} = 4^9 \Rightarrow (x-2)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \Rightarrow x = 5 \\ x - 2 = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$

c) $9^x + 5 \,.\, 3^x - 24 = 0 \Rightarrow (3^2)^x + 5 \,.\, 3^x - 24 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 + 5 \cdot 3^x - 24 = 0$

$3^x = z \Rightarrow z^2 + 5z - 24 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-5 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z = -8 \Rightarrow 3^x = -8 \text{ sin solución real} \end{cases}$

d) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \dfrac{9^x}{9} = 90 \Rightarrow 3^2 \cdot 3^x + \dfrac{(3^x)^2}{9} = 90$

$3^x = z \Rightarrow 9z + \dfrac{z^2}{9} = 90 \Rightarrow z^2 + 81z - 810 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-81 \pm 99}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -90 \Rightarrow 3^x = -90, \text{ sin solución real} \end{cases}$

e) $3^{2x} + 3^{2x-1} + 3^{x-1} = 111 \Rightarrow (3^x)^2 + \dfrac{(3^x)^2}{3} + \dfrac{3^x}{3} = 111$

$3^x = z \Rightarrow z^2 + \dfrac{z^2}{3} + \dfrac{z}{3} = 111 \Rightarrow 4z^2 + z - 333 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm 73}{8} \Rightarrow \begin{cases} z = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2 \\ z = -\dfrac{37}{4} \Rightarrow 3^x = -\dfrac{37}{4}, \text{ sin solución real} \end{cases}$

f) $2^{2x-4} - 5 \cdot 2^{x-3} + 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{(2^x)^2}{16} - 5 \,.\, \dfrac{2^x}{8} + 1 = 0$

$2^x = z \Rightarrow \dfrac{z^2}{16} - \dfrac{5z}{8} + 1 = 0 \Rightarrow z^2 - 10z + 16 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{10 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} z = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ z = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

g) $9^{x+2} + 3^{x+3} - 810 = 0 \Rightarrow 81 \cdot (3^x)^2 + 27 \cdot 3^x - 810 = 0$

$3^x = z \Rightarrow 3z^2 + z - 30 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{-1 \pm 19}{6} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ z = -\dfrac{10}{3} \Rightarrow 3^x = -\dfrac{10}{3}, \text{ sin solución real} \end{cases}$

h) $\sqrt[x]{27} = 3^{x+2} \Rightarrow (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} = 3^{x+2} \Rightarrow \dfrac{3}{x} = x + 2 \Rightarrow 3 = x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$

Sistemas de ecuaciones

2.50. Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{2} + 3 \\ y = 2x + 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(2x + y) - 3(3x - 2y) = -34 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases}$

a) $\begin{cases} y = \dfrac{x+1}{2} + 3 \\ y = 2x + 10 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x+1}{2} + 3 = 2x + 10 \Rightarrow x + 1 + 6 = 4x + 20 \Rightarrow 3x = -13 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\dfrac{13}{3},\ y = \dfrac{4}{3}$. Solución: $\left(x = -\dfrac{13}{3},\ y = \dfrac{4}{3}\right)$

b) $\begin{cases} 2(2x + y) - 3(3x - 2y) = -34 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 9x + 6y = -34 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5x + 8y = -34 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -5x + 8y = -34 \\ 12x - 8y = 48 \end{cases} \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow x = 2,\ y = -3$

Solución: $(x = 2,\ y = -3)$

2.51. Indica si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles, y calcula, según el caso, todas sus soluciones.

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 4x + 2y - 6z = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ 2x - 4y + 3z = -2 \\ 4x - y + 6z = -4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ 5x - 3y + 8z = 6 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \\ 4x + 2y - 6z = 6 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ -3y + 2z = -4 \\ -10y + 2z = -18 \end{cases} \; E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 6 \\ -3y + 2z = -4 \\ -7y = -14 \end{cases} \Rightarrow y = 2,\ \ z = 1,\ \ x = 2$

Sistema compatible determinado. Solución única: $(x = 2,\ \ y = 2,\ \ z = 1)$

b) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = 1 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 3E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ -8y + 10z = -14 \end{cases} \; E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ 0 = -12 \end{cases}$

Sistema incompatible. No hay solución.

c) $\begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ 2x - 4y + 3z = -2 \\ 4x - y + 6z = -4 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - E_1 \\ E_3 - 2E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ -5y + 5z = -10 \\ -3y + 10z = -20 \end{cases} \; \frac{E_2}{-5} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ y - z = 2 \\ -3y + 10z = -20 \end{cases} \; E_3 + 3E_2 \begin{cases} 2x + y - 2z = 8 \\ y - z = 2 \\ 7z = -14 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow z = -2,\ \ y = 0,\ \ x = 2$

Sistema compatible determinado. Solución: $(x = 2,\ \ y = 0,\ \ z = -2)$

d) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ 2x - 3y + 5z = 6 \\ 5x - 3y + 8z = 6 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 5E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -9y + 9z = 18 \\ -18y + 18z = 36 \end{cases} \; E_3 - 2E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = -6 \\ -y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow z = t,\ y = t - 2,\ x = -t$

Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones: $(x = -t,\ \ y = t - 2,\ \ z = t)$

2.52. Estudia la compatibilidad de estos sistemas y halla, en su caso, sus soluciones.

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 5x - y + 2z = 11 \\ 6x + y + z = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 15 \\ x + y - z = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = 18 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 2E_1 \\ E_3 - 4E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = 2 \end{cases} \; E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y = 2 - 2z \end{cases} \Rightarrow z = t,\ \ y = 2 - 2t,\ \ x = 6t$

Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones: $(x = 6t,\ \ y = 2 - 2t,\ \ z = t)$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 5x - y + 2z = 11 \\ 6x + y + z = 5 \end{cases} \begin{matrix} E_2 - 5E_1 \\ E_3 - 6E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -11y + 7z = 36 \\ -11y + 7z = 35 \end{cases} \; E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ -11y + 7z = 36 \\ 0 = -1 \end{cases}$

Sistema incompatible. No hay solución.

c) $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 15 \\ x + y - z = 7 \end{cases} \begin{matrix} 2E_2 - 3E_1 \\ 2E_3 - E_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - 7z = 30 \\ y - 3z = 14 \end{cases} \; E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y - 7z = 30 \\ 4z = -16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -4 \end{cases}$

Sistema compatible determinado. Solución única.

d) $\begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 5 \end{cases} E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x = 2 \end{cases} E_3 - E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 2 \\ 2y + z = -1 \\ x = 2 \end{cases} E_1 + 2E_2 \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 2 \\ 7y = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Sistema compatible determinado. Solución única.

2.53. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones de segundo grado.

a) $\begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy - 2x^2 = -26 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{2} = 15 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 20 \\ 4x^2 - y^2 = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - 2(x - y)_2 = 36 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x - 6y = -6 \\ 2x^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6y - 6 \\ 2(6y - 6)^2 + y^2 = 76 \end{cases} \Rightarrow 73y^2 - 144y - 4 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{144 \pm 148}{146} \Rightarrow \begin{cases} x = 6,\ y = 2 \\ x = -\dfrac{450}{73},\ y = -\dfrac{2}{73} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3xy - 2x^2 = -26 \\ 4x + 5y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x \cdot \dfrac{7 + 4x}{5} - 2x^2 = -26 \\ y = -\dfrac{7 + 4x}{5} \end{cases} \Rightarrow -22x^2 - 21x + 130 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{21 \pm 109}{-44} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{65}{22},\ y = \dfrac{53}{55} \\ x = 2,\ y = -3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + \dfrac{y}{2} = 15 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + y = 30 \\ 2y + 3x = xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 30 - 6x \\ 60 - 12x + 3x = 30x - 6x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{13 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4,\ y = 6 \\ x = \dfrac{5}{2},\ y = 15 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5 - x}{2} \\ x^2 + 3xy = -8 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x\left(\dfrac{5 - x}{2}\right) = -8 \Rightarrow x^2 - 15x + 16 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{15 \pm 17}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 16,\ y = \dfrac{-11}{2} \\ x = -1,\ y = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 20 \\ 4x^2 - y^2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5y^2 = 20 \\ 20x^2 - 5y^2 = -20 \end{cases} \Rightarrow 23x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0,\ y = 2 \\ x = 0,\ y = -2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - 2(x - y)^2 = 36 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ 3x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 2y^2 + 4xy = 36 \\ y = 15 - \dfrac{3}{2}x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow -x^2 - 2\left(15 - \dfrac{3}{2}x\right)^2 + 4x\left(15 - \dfrac{3}{2}x\right) = 36 \Rightarrow -x^2 - 450 - \dfrac{9}{2}x^2 + 90x + 60x - 6x^2 = 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{23}{2}x^2 + 150x - 486 = 0 \Rightarrow 23x^2 - 300x + 972 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{300 \pm 24}{46} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{162}{23},\ y = \dfrac{102}{23} \\ x = 6,\ y = 6 \end{cases}$

2.54. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15 \cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 4^x + 9^y = 85 \end{cases} \Rightarrow 2^x = A,\ \ 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + B = 11 \\ A^2 + B^2 = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2,\ B = 9 \Rightarrow x = 1,\ y = 2 \\ A = 9,\ B = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\log 9}{\log 2},\ y = \dfrac{\log 2}{\log 3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 15 \cdot 5^x - 6^{y+1} = 339 \\ 3 \cdot 5^{x+1} + 2 \cdot 6^{y+2} = 807 \end{cases}$ Si $A = 5^x,\ \ B = 6^y \Rightarrow \begin{cases} 15A - 6B = 339 \\ 15A + 72B = 807 \end{cases} \Rightarrow A = 25,\ B = 6 \Rightarrow x = 2,\ y = 1$

c) $\begin{cases} 2^x + 2 \cdot 3^{y+1} = 8 \\ 5 \cdot 2^{x-1} + 9^y = 6 \end{cases}$ Si $2^x = A,\ \ 3^y = B \Rightarrow \begin{cases} A + 6B = 8 \\ \dfrac{5}{2}A + B^2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2,\ B = 1 \Rightarrow x = 1,\ y = 0 \\ A = -76,\ B = 14. \text{ Sin solución real} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3^x + 3^{y+1} = 18 \\ x = +3y = -1 \end{cases} \Rightarrow 3^{3y-1} + 3^{y+1} = 18 \Rightarrow$ Si $z = 3^y \Rightarrow \dfrac{1}{3}z^3 + 3z = 18 \Rightarrow (z - 3)(z^2 + 3z + 18) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ z^2 + 3z + 18 = 0. \text{ Sin solución real} \end{cases} \Rightarrow 3 = 3^y \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$

2.55. Halla la solución de los siguientes sistemas logarítmicos.

a) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases}$ e) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} x + y = 33 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 33 \\ \dfrac{x}{y} = 10 \end{cases} \Rightarrow 11y = 33 \Rightarrow x = 30,\ \ y = 3$

b) $\begin{cases} \log x^2 - \log y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = 100 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 100y^2 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 100y^2 + y^2 = 29 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 100\sqrt{\dfrac{29}{101}} \\ y = \pm\sqrt{\dfrac{29}{101}} \end{cases}$. Hay cuatro soluciones

c) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2 + \log y - \log x = \log 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ \dfrac{y^2}{x} = 250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 25\,000 \\ y = 2500 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2\log(x-2) + 3\log(y+2) = 2 \\ 4\log(x-2) + 5\log(y+2) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2(y+2)^3 = 100 \\ (x-2)^4(y+2)^5 = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^4(y+2)^6 = 10^4 \\ (x-2)^4(y+2)^5 = 10^{-1} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(y+2)^6}{(y+2)^5} = \dfrac{10^4}{10^{-1}} = 10^5 \Rightarrow \begin{cases} y + 2 = 10^5 \Rightarrow y = 10^5 - 2 \\ (x-2)^2\left(10^5\right)^3 = 10^2 \Rightarrow (x-2)^2 = 10^{-13} \end{cases} \Rightarrow x = 10^{-\frac{13}{2}} + 2$

e) $\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ 2^{x-24} = 4^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 10 \\ 2^{x-24} = 2^{2y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10y \\ x = 2y + 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 3 \end{cases}$

Inecuaciones

2.56. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado.

a) $3x + 3(2x - 5) - 4(x - 2) \leqslant 2 - x$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2}$

c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \geqslant -\dfrac{8}{9}$

d) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \leqslant 2(x-1) - \dfrac{35}{4}$

a) $3x + 3(2x - 5) - 4(x - 2) \leqslant 2 - x \Rightarrow 3x + 6x - 15 - 4x + 8 \leqslant 2 - x \Rightarrow 6x \leqslant 9 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Solución $\left(-\infty \quad \dfrac{3}{2}\right]$

b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{6} > 1 - \dfrac{2x-5}{2} \Rightarrow 3x - x + 1 > 6 - 6x + 15 \Rightarrow 8x > 20 \Rightarrow x > \dfrac{5}{2} \Rightarrow$ Solución $\left(\dfrac{5}{2} \quad +\infty\right)$

c) $\dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x+2}{4} + \dfrac{x-3}{18} \geqslant -\dfrac{8}{9} \Rightarrow 12x + 12 - 9x - 18 + 2x - 6 \geqslant -32 \Rightarrow 5x \geqslant -20 \Rightarrow x \geqslant -4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Solución $[-4 \quad +\infty)$

d) $\dfrac{2x-3}{4} - \dfrac{x}{2} \leqslant 2(x-1) - \dfrac{35}{4} \Rightarrow 2x - 3 - 2x \leqslant 8x - 8 - 35 \Rightarrow 40 \leqslant 8x \Rightarrow x \geqslant 5 \Rightarrow$ Solución $[5 \quad +\infty)$

2.57. Calcula las soluciones de las inecuaciones polinómicas siguientes.

a) $x^2 + x - 12 \geqslant 0$

b) $-2x^2 + 3x > 0$

c) $4x^2 - 1 \leqslant 0$

d) $6x^2 + x - 1 < 0$

e)* $x^3 - 4x \leqslant 0$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0$

g) $x^4 - 1 \geqslant 0$

h) $x^3 - 7x + 6 \leqslant 0$

a) $x^2 + x - 12 \geqslant 0 \Rightarrow (x + 4)(x - 3) \geqslant 0$

	$-\infty$ … -4	-4 … 3	3 … $+\infty$
$x + 4$	–	+	+
$x - 3$	–	–	+
polinomio	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$

b) $-2x^2 + 3x > 0 \Rightarrow x(-2x + 3) > 0$

	$-\infty$ … 0	0 … $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ … $+\infty$
x	–	+	+
$-2x + 3$	+	+	–
polinomio	–	+	–

Solución: $x \in \left(0, \dfrac{3}{2}\right)$

c) $4x^2 - 1 \leqslant 0 \Rightarrow (2x - 1)(2x + 1) \leqslant 0$

	$-\infty$ … $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ … $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ … $+\infty$
$2x + 1$	–	+	+
$2x - 1$	–	–	+
polinomio	+	–	+

Solución: $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

d) $6x^2 + x - 1 < 0 \Rightarrow (3x - 1)(2x + 1) < 0$

	$-\infty$ … $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ … $\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ … $+\infty$
$2x + 1$	–	+	+
$3x - 1$	–	–	+
polinomio	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$

e) $x^3 - 4x \leqslant 0 \Rightarrow x(x + 2)(x - 2) \leqslant 0$

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … $+\infty$
$x + 2$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
polinomio	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2] \cup [0, 2]$

f) $x^3 - 3x - 2 < 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1)2 < 0 \Rightarrow x < 2$, ya que el factor $(x + 1)^2$ es positivo excepto para $x = -1$.

Por tanto, la solución es $x \in (-\infty, 2) - \{-1\}$

g) $x^4 - 1 \geqslant 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1) \geqslant 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 1)(x - 1) \geqslant 0$, al ser $x^2 + 1$ siempre positivo.

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$x + 1$	–	+	+
$x - 1$	–	–	+
polinomio	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

h) $x^3 - 7x + 6 \leqslant 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 2)(x + 3) \leqslant 0$

	$-\infty$ … -3	-3 … 1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x + 3$	–	+	+	+
$x - 1$	–	–	+	+
$x - 2$	–	–	–	+
polinomio	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2)$

2.58. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales.

a)* $\dfrac{5x - 2}{2x + 1} \leqslant 0$ 　 b) $\dfrac{3x - 1}{5 - 10x} > 0$ 　 c) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 2} \leqslant 0$ 　 d) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} > 0$ 　 e) $\dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} < 0$

a) $\dfrac{5x - 2}{2x + 1} \leqslant 0$

$-\infty \qquad -\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{5} \qquad +\infty$

$5x - 2$	−	−	+
$2x + 1$	−	+	+
fracción	+	−	+

Solución: $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right]$

b) $\dfrac{3x - 1}{5 - 10x} > 0$

$-\infty \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2} \qquad +\infty$

$5 - 10x$	+	+	−
$3x - 1$	−	+	+
fracción	−	+	−

Solución: $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

c) $\dfrac{x^2 - 1}{x + 2} \leqslant 0 \Rightarrow \dfrac{(x - 1)(x + 1)}{x + 2} \leqslant 0$

$-\infty \qquad -2 \qquad -1 \qquad 1 \qquad +\infty$

$x + 2$	−	+	+	+
$x + 1$	−	−	+	+
$x - 1$	−	−	−	+
polinomio	−	+	−	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 1]$

d) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x + 6} > 0 \Rightarrow \dfrac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 2)(x - 3)} > 0$

$-\infty \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad +\infty$

$x - 1$	−	+	+	+	+
$x - 3$	−	−	+	+	+
$x - 3$	−	−	−	+	+
$x - 4$	−	−	−	−	+
fracción	+	−	+	−	+

Solución: $x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$

e) $\dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 + 5x^2 + 3x - 9} < 0 \Rightarrow \dfrac{(x + 3)(x - 1)^2}{(x + 3)^2(x - 1)} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si $x \neq -3$ y $x \neq 1$, $\dfrac{x - 1}{x + 3} < 0$

$-\infty \qquad -3 \qquad 1 \qquad +\infty$

$x + 3$	−	+	−
$x - 1$	−	−	+
fracción	+	−	+

Solución: $x \in (-3, 1)$

PROBLEMAS

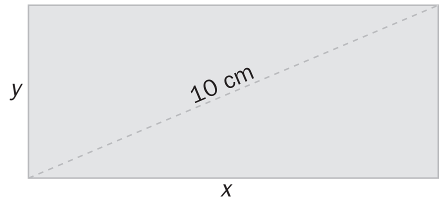
2.59. El área del rectángulo mide 48 cm^2:

a) Calcula el valor de las expresiones algebraicas $A = x^2 + y^2$ y $B = x\,y$ e interpreta su significado.

b) Calcula el valor de la expresión radical $L = \sqrt{A + 2B}$ e interpreta su significado.

c) Calcula el valor del perímetro del rectángulo.

d) Calcula las dimensiones del rectángulo.



a) A representa el cuadrado de la diagonal y, por tanto, $A = 100$ cm^2.
B representa el área del rectángulo y, por tanto, $B = 48$ cm^2.

b) $L = \sqrt{100 + 2 \cdot 48} = 14 = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy} = \sqrt{(x + y)^2} = x + y$
L representa la mitad del perímetro del rectángulo.

c) El perímetro es $2(x + y) = 28$ cm.

d) $y = 14 - x \Rightarrow x(14 - x) = 48 \Rightarrow$ Las dimensiones del rectángulo son 8 y 6 cm, respectivamente.

2.60. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = -3x^3 + x^2 - 2x + k$ sea divisible por $x + 2$.

Por el teorema del resto, si $P(x)$ es divisible por $x + 2$, entonces $P(-2) = 0$. Por tanto:

$P(-2) = 0 \Rightarrow -3 \cdot (-8) + (-2)^2 - 2 \cdot (-2) + k = 0 \Rightarrow 32 + k = 0 \Rightarrow k = -32$

2.61. Calcula el valor de a y b para que el polinomio $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + ax + b$ sea divisible por $x^2 + x - 6$.

Puesto que $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, para que $P(x)$ sea divisible por $x^2 + x - 6$, debe serlo por $x - 2$ y $x + 3$ a la vez. Por tanto:

$$\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 32 + 16 - 44 + 2a + b = 0 \\ 162 - 54 - 99 - 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -4 \\ -3a + b = -9 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \ \ b = -6$$

2.62. Calcula el valor de a y b para que el polinomio $P(x) = 2x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + ax + b$ sea divisible por $x - 1$ y para que su valor numérico en $x = -1$ valga -12.

Al ser $P(x)$ divisible por $x - 1$, el teorema del resto garantiza que $P(1) = 0$. Por otro lado, $P(-1) = -12$. Por tanto:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-1) = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2 + 3 - 3 + a + b = 0 \\ -2 - 2 - 3 - 3 - a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \ \ b = -1$$

2.63. Calcula la expresión de $P(x)$ sabiendo que $P(2x + 1) = 8x^2 + 14x$.

$P(x)$ es un polinomio de segundo grado. Podemos escribir: $Px) = ax^2 + bx + c$. Se tiene que:

$P(2x+1) = a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c = a(4x^2 + 1 + 4x) + 2bx + b + c = 4ax^2 + (4a + 2b)x + a + b + c = 8x^2 + 14x$

Por tanto: $\begin{cases} 4a = 8 \\ 4a + 2b = 14 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, \ \ b = 3, \ \ c = -5 \Rightarrow \mathrm{P}(x) = 2x^2 + 3x - 5$

2.64. En un concurso de matemáticas se propone una prueba de 25 preguntas. Cada una de ellas tiene 5 posibles respuestas de las que solo una es verdadera. Por cada respuesta acertada se obtienen 5 puntos; si se responde de forma errónea se obtienen 0 puntos, y si se deja una pregunta sin respuesta se obtienen 2.

a) Escribe la expresión algebraica que determina la puntuación de un concursante utilizando las indeterminadas, x, número de respuestas acertadas, e y, número de respuestas incorrectas.

b) Si de un concursante se sabe que ha obtenido 80 puntos, ¿cómo puede deducirse el número de respuestas acertadas, erróneas y no contestadas? Da dos ejemplos posibles.

c) En dos de las preguntas no contestadas, ese mismo concursante dudaba entre dos de las cinco opciones. ¿Qué puntuación habría obtenido en el caso de haberlas contestado y acertado?

a) La expresión algebraica que da la puntuación es:

$P(x, y) = 5x + 2(25 - x - y) = 5x + 50 - 2x - 2y = 3x - 2y + 50$

b) Si el concursante ha obtenido 80 puntos, se tiene que:

$3x - 2y + 50 = 80 \Rightarrow 3x - 2y = 30 \Rightarrow y = \dfrac{3x - 30}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3x}{2} - 15$

Dos posibles ejemplos pueden ser:

$x = 10, \ \ y = 0$ Acierta 10 preguntas y no contesta ninguna de las otras 15.

$x = 12, \ \ y = 3$ Acierta 12 preguntas, falla 3 y no contesta 10.

c) Habría obtenido 6 puntos más. Es decir, 86.

2.65. Si se divide un número por 5 y por 13 y se suman los cocientes, el resultado es 72. Halla dicho número.

Sea x el número desconocido: $\dfrac{x}{5} + \dfrac{x}{13} = 72 \Rightarrow 13x + 5x = 4680 \Rightarrow x = \dfrac{4680}{18} = 260$

2.66. Si sumamos cuatro números impares consecutivos obtenemos como resultado 72. ¿Cuáles son estos números?

Sean x, $x + 2$, $x + 4$, $x + 6$ los números buscados. Se tiene que:

$x + x + 2 + x + 4 + x + 6 = 72 \Rightarrow 4x + 12 = 72 \Rightarrow x = \dfrac{60}{4} = 15$

Por tanto, los números buscados son: 15, 17, 19 y 21.

2.67. Un padre tiene 48 años, y su hijo, 15. ¿Cuántos años han de pasar para que la edad del padre sea justo el doble de la del hijo?

Sean x los años que han de pasar. Se tiene que $48 + x = 2(15 + x) \Rightarrow 48 + x = 30 + 2x \Rightarrow x = 18$.

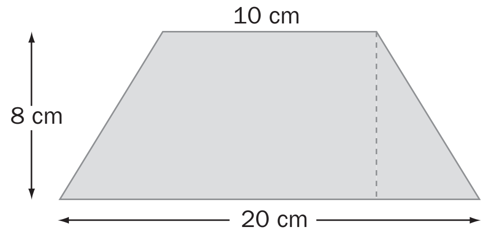
Dentro de 18 años, la edad del padre será el doble de la del hijo.

2.68. Hace cinco años, la edad de una madre era triple de la de su hijo, y dentro de diez sólo será el doble. Halla las edades actuales de ambos.

Sean $3x$ y x las edades de hace cinco años. Las edades actuales han de ser $3x + 5$ y $x + 5$, y las edades dentro de 10 años, $3x + 15$ y $x + 15$. Por tanto, se tiene que $3x + 15 = 2(x + 15) \Rightarrow x = 15$.

La edad actual de la madre es 50 años, y la del hijo, 20.

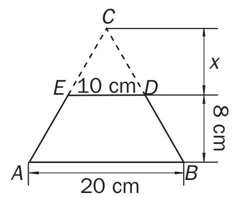
2.69. Las bases de un trapecio miden 10 y 20 cm, respectivamente, y la altura, 8 cm. Calcula la altura del triángulo que resulta al prolongar los dos lados no paralelos del trapecio.



La superficie del trapecio es: $S_T = \dfrac{(20 + 10) \cdot 8}{2} = 120 \text{ cm}^2$

La superficie del triángulo CED es: $S_{CED} = \dfrac{10x}{2} = 5x$

La superficie del triángulo ABC es: $S_{ABC} = \dfrac{20(x + 8)}{2} = 10x + 80$



Por tanto, se tiene que:

$10x + 80 - 5x = 120 \Rightarrow 5x = 120 - 80 = 40 \Rightarrow x = \dfrac{40}{5} = 8$

La altura del triángulo ABC es $8 + 8 = 16$ cm

2.70. En una clase de primero de Bachillerato hay tantos alumnos que estudian Tecnología de la Información como alumnos que estudian Comunicación audiovisual. Sin embargo, el número de alumnos que estudian Francés es inferior en una unidad al de los que estudian Tecnología de la Información.

Calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas

Sea x el número de alumnos que cursan Tecnología de la Información. Entonces, también estudian Comunicación audiovisual x alumnos, y Francés, $x - 1$.

Se tiene que $x + x + x - 1 = 35 \Rightarrow x = 13$.

Por tanto, 13 alumnos estudian Tecnología de la Información; otros 13, Comunicación audiovisual, y 12, Francés.

2.71. Para participar en las próximas competiciones locales de atletismo se deben pasar dos pruebas. En la primera se elimina al 60% de los participantes, y en la segunda, a las dos terceras partes de los que quedan.

¿Cuántos participantes se apuntaron en un principio si después de las dos pruebas quedan 10 atletas para competir en la final?

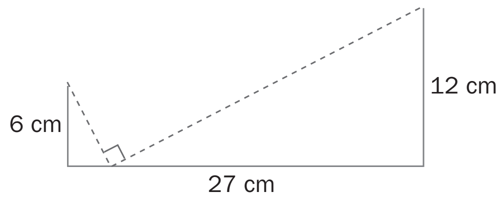
Sea x el número de participantes iniciales. Después de la primera prueba quedan $0{,}4x$.

Después de la segunda prueba quedan $\dfrac{0{,}4x}{3}$. Por tanto, $\dfrac{0{,}4x}{3} = 10 \Rightarrow x = 75$.

Se apuntaron 75 participantes.

2.72. **El segmento *AB* mide 27 cm. En sus extremos se levantan segmentos perpendiculares de 6 y 12 cm, respectivamente.**

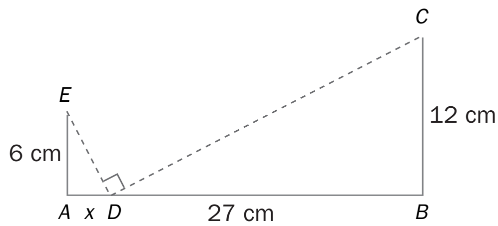
Determina un punto del segmento *AB* tal que si se une con los extremos más alejados de los perpendiculares se forma un ángulo recto.



Para que el ángulo *EDC* sea recto, los ángulos *EDA* y *CDB* deben sumar 90º. Por tanto, *EDA* deberá ser igual a *DCB* y, en consecuencia, los triángulos rectángulos *EAD* y *CBD* deben ser semejantes.

Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{x}{6} = \frac{12}{27 - x} \Rightarrow 27x - x^2 = 72 \Rightarrow x^2 - 27x + 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \text{ cm} \\ x = 3 \text{ cm} \end{cases}$$



2.73. **a) Calcula la suma y el producto de las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x + c = 0$.**

b) Calcula el valor de *c* para que el producto de las soluciones de la ecuación anterior valga −18.

a) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -3 \qquad x_1 \cdot x_2 = c$

b) $x_1 \cdot x_2 = c = -18$

2.74. **Se ha comprado un determinado número de DVD vírgenes por una cantidad total de 17,25 euros. Si se comprasen discos de una calidad superior, cuyo precio es 0,40 euros más caro por unidad, se deberían adquirir 8 menos para que el precio total no variase. ¿Cuántos discos se han comprado?**

Sea *x* el número de DVD adquiridos. El precio de cada uno es de $\frac{17{,}25}{x}$ euros.

Si se comprasen discos de una calidad superior, el precio de cada disco sería $\left(\frac{17{,}25}{x} + 0{,}4\right)$.

Para que el precio final no variase, se deberían adquirir $x - 8$. Por tanto, se tiene que

$$\left(\frac{17{,}25}{x} + 0{,}4\right)(x - 8) = 17{,}25 \Rightarrow 17{,}25 + 0{,}4x - \frac{138}{x} - 3{,}2 = 17{,}25 \Rightarrow 0{,}4x^2 - 3{,}2x - 138 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3{,}2 \pm 15{,}2}{0{,}8} = \begin{cases} x = 23 \\ x = -15 \quad \text{solución sin sentido} \end{cases}$$

Se han comprado 23 discos.

2.75. **Un técnico informático espera obtener 360 euros por la reparación de varios equipos. El técnico se da cuenta de que cuatro ordenadores no tienen posible reparación y, para obtener el mismo beneficio, aumenta en 4,50 euros el precio que va a cobrar por un equipo reparado. ¿Cuántos ordenadores tenía al principio? ¿A qué precio cobrará finalmente cada reparación?**

Sea *x* el número de ordenadores que se tienen inicialmente. Por cada uno, el técnico piensa cobrar $\frac{360}{x}$ euros. Sin embargo, finalmente solo reparará $x - 4$. Se verifica:

$$\left(\frac{360}{x} + 4{,}5\right)(x - 4) = 360 \Rightarrow 360 - \frac{1440}{x} + 4{,}5x - 18 = 360 \Rightarrow 4{,}5x^2 - 18x - 1440 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{18 \pm 162}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ x = -16 \quad \text{solución sin sentido} \end{cases}$$

Por tanto, el número inicial de ordenadores era 20.

2.76. **La suma de un número positivo más el valor de su raíz cuadrada coincide con el triple de dicho número. ¿De qué número de trata?**

Sea *x* el número desconocido. Se tiene que: $x + \sqrt{x} = 3x \Rightarrow \sqrt{x} = 2x \Rightarrow x = 4x^2 \Rightarrow x(4x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$

2.77. Se sabe que una cierta población de insectos se incrementa en un 9% cada semana. Calcula el tiempo que ha de pasar para que la población se multiplique por cinco.

Sea P el número inicial de insectos. Al cabo de una semana se tendrán $P \cdot 1{,}09$. Al cabo de t semanas se tendrán $P \cdot 1{,}09^t$ insectos. Por tanto:

$$5P = P \cdot 1{,}09^t \Rightarrow 1{,}09^t = 5 \Rightarrow t = \frac{\log 5}{\log 1{,}09} = 18{,}676 \text{ semanas} \approx 131 \text{ días}$$

2.78. La suma de un número de dos cifras más el que resulta al invertirlas es 99. ¿Cuánto vale la suma de las dos cifras de ese número?

Sea $[xy]_{10)} = 10x + y$ el número desconocido. El número invertido será $[yx]_{10)} = 10y + x$.

Se tiene que $10x + y + 10y + x = 99 \Rightarrow 11x + 11y = 99 \Rightarrow x + y = 9$. Las dos cifras suman 9.

2.79. Halla un número de tres cifras sabiendo que su suma es 12, que la cifra de las unidades es igual a la semisuma de las cifras de las centenas y de las decenas, y que, por último, el número que resulta al invertir las cifras del buscado es 198 unidades más pequeño que éste.

Suponiendo que el número buscado es el $[xyz]_{10)} = 100x + 10y + z$ y que, por tanto, el número que resulta al invertir sus cifras es $[zyx]_{10)} = 100z + 10y + x$, podemos escribir:

$$\begin{cases} x+y+z=12 \\ x+y-2z=0 \\ 99x-99z=198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ -3z=-12 \\ x-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=12 \\ z=4 \\ x=2+z=6 \end{cases} \Rightarrow y=12-4-6=2 \Rightarrow \text{El número buscado es el 624.}$$

2.80. Se consideran tres barras de metal compuestas de la siguiente forma:

Primera barra: 30 g de oro, 45 g de plata y 75 g de cobre

Segunda barra: 60 g de oro, 30 g de plata y 135 g de cobre

Tercera barra: 45 g de oro, 60 g de plata y 75 g de cobre.

¿Qué cantidad deberá tomarse de cada una de las barras para obtener otra que contenga 64,5 g de oro, 69 g de plata y 136,5 g de cobre?

En la primera barra se verifica que $\frac{30}{150} = \frac{2}{10}$ es oro, $\frac{45}{150} = \frac{3}{10}$ es plata y $\frac{75}{150} = \frac{5}{10}$ es cobre.

En la segunda se verifica que $\frac{60}{225} = \frac{4}{15}$ es oro, $\frac{30}{225} = \frac{2}{15}$ es plata y $\frac{135}{225} = \frac{9}{15}$ es cobre.

En la tercera se verifica que $\frac{45}{180} = \frac{3}{12}$ es oro, $\frac{60}{180} = \frac{4}{12}$ es plata y $\frac{75}{180} = \frac{5}{12}$ es cobre.

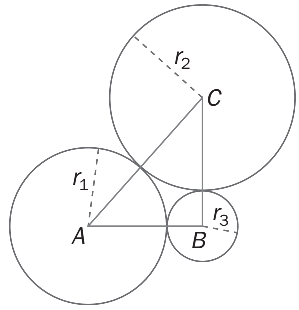
Supongamos que tomamos x gramos de la barra primera, y de la segunda y z de la tercera. En estas condiciones, se puede escribir el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x + \frac{4}{15}y + \frac{3}{12}z = 64{,}5 \\ \frac{3}{10}x + \frac{2}{15}y + \frac{4}{12}z = 69 \\ \frac{5}{10}x + \frac{9}{15}y + \frac{5}{12}z = 136{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 16y + 15z = 3870 \\ 18x + 8y + 20z = 4140 \\ 30x + 36y + 25z = 8190 \end{cases} \Rightarrow x = 90,\ y = 90,\ z = 90$$

Por tanto, se deberán tomar 90 gramos de cada una de las barras.

2.81. **Los catetos de un triángulo rectángulo miden 27 y 36 cm, respectivamente. Con centro en los vértices del triángulo, se trazan tres circunferencias de forma que son tangentes exteriores dos a dos.**

Calcula los radios de las tres circunferencias.



Mediante el teorema de Pitágoras, se calcula el valor de la hipotenusa: $\sqrt{36^2 + 27^2} = 45$ cm.

Así se tiene que: $\begin{cases} r_1 + r_3 = 27 \\ r_2 + r_3 = 36 \\ r_1 + r_2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 - r_2 = -9 \\ r_1 + r_2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 18 \\ r_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow r_3 = 9$

Los radios de las circunferencias son de 9, 18 y 27 cm, respectivamente.

2.82. **Se dispone de un recipiente de 24 litros de capacidad y de tres medidas *A*, *B* y *C*. Se sabe que el volumen de *A* es el doble que el de *B*, que las tres medidas llenan el depósito y que las dos primeras lo llenan hasta la mitad. ¿Qué capacidad tiene cada medida?**

Sea x la capacidad de B y $2x$ la capacidad de A.

Como las tres medidas llenan el depósito, se tiene que la medida de C ha de ser $24 - 2x - x$.

Por otro lado, ha de ser $2x + x = 12 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$.

La medida de *A* es 8 litros; la de *B*, 4, y la de *C*, 12 litros.

2.83. **Un almacenista trabaja con tres tipos de televisores. Cada televisor del primer tipo le cuesta 180 euros; el del segundo tipo, 90 euros, y el del tercer tipo, 30 euros. Un pedido de 105 unidades tiene un importe total de 9600 euros.**

Determina el número de televisores pedidos de cada clase sabiendo que el número de televisores del segundo tipo es el doble que los del primero y tercer tipo juntos.

Sean x el número de televisores del primer tipo e y el número de televisores del tercer tipo. El número de televisores del segundo tipo es $2(x + y)$.

Se tiene que:

$$\begin{cases} x + 2(x + y) + y = 105 \\ 180x + 90 \cdot 2(x + y) + 30y = 9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 3y = 105 \\ 360x + 210y = 9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 35 \\ 360x + 210y = 9600 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 35 - y \\ 360(35 - y) + 210y = 9600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 - y \\ 12\,600 - 9600 = 150y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 35 - y \\ y = \dfrac{3000}{150} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 20 \end{cases}$$

Se pidieron 15 televisores de tipo 1, 70 televisores de tipo 2 y 20 televisores de tipo 3.

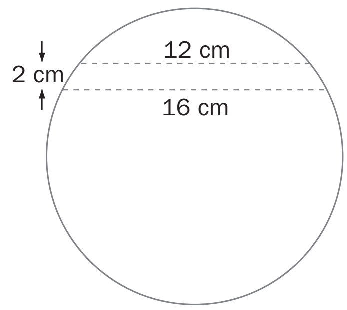
2.84. **Halla tres números sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que, si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero, el resultado es 5.**

Sea x el segundo número e y el tercero. El primer número es $2x + \dfrac{y}{2}$. Se tiene:

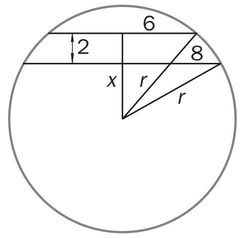
$$\begin{cases} x + y = 2x + \dfrac{y}{2} + 1 \\ 2x + \dfrac{y}{2} + y - x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -2 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow E_2 - E_1 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$$

Los números buscados son $\dfrac{5}{2}$, $\dfrac{1}{2}$ y 3.

2.85. Las dos cuerdas paralelas dibujadas en la circunferencia miden 12 y 16 cm de longitud, respectivamente. La distancia entre las cuerdas es de 2 cm. Halla el radio de la circunferencia.



Aplicando el teorema de Pitágoras:



$$\left.\begin{array}{l} 8^2 + x^2 = r^2 \\ 6^2 + (2 + x)^2 = r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 64 + x^2 = 36 + 4 + x^2 + 4x$$

$\Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$ cm

$r^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow r = 10$ cm

2.86. Si se disminuye en 10 cm el lado de un cuadrado, su área disminuye en 400 cm^2. ¿Cuál es el tamaño original del cuadrado?

Sea x el lado del cuadrado. Su área es x^2. Se tiene que $(x - 10)^2 = x^2 - 400$. Por tanto,

$x^2 - 20x + 100 = x^2 - 400 \Rightarrow 20x = 500 \Rightarrow x = 25$

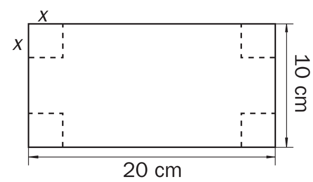
El lado del cuadrado inicial mide 25 cm.

2.87. De una cartulina que mide 20 × 10 centímetros se recortan cuatro cuadrados iguales en las esquinas. Se dobla y se pega para hacer un pequeño recipiente sin tapa, que tiene una capacidad de 191 cm^3. ¿De qué tamaño eran los cuadrados que se han recortado?

En el dibujo se aprecia que la caja formada tendrá por base un rectángulo de dimensiones $(20 - 2x)$ y $(10 - 2x)$ centímetros, respectivamente. Por tanto su capacidad será:

$C = (20 - 2x)(10 - 2x)x = 191 \Rightarrow 4x^3 - 50x^2 + 200x - 191 = 0$.

Las soluciones aproximadas de esta ecuación son $x_1 = 1{,}91$ cm, $x_2 = 2{,}32$ cm y $x_3 = 10{,}77$ cm. De las tres solo son válidas las dos primeras ya que la tercera implicaría que un lado tuviera longitud negativa.



2.88. En una tienda de productos de imagen y sonido se adquiere un reproductor de música y un televisor. La suma de los precios que marcan los dos productos es de 525 euros, pero el dependiente informa al cliente de que a los aparatos de música se les aplica una rebaja del 6% y a los televisores una rebaja del 12%, por lo que en realidad debe pagar 471 euros. ¿Qué precio se ha pagado finalmente por cada uno de estos dos productos?, ¿cuánto costaban antes de las rebajas?

Sea x el precio inicial del reproductor de música e y el precio inicial del televisor.

$\begin{cases} x + y = 525 \\ 0{,}94x + 0{,}88y = 471 \end{cases} \Rightarrow x = 150 \quad y = 375$ euros. El reproductor de música costaba 150 euros, y el televisor, 375.

2.89. Un comerciante adquiere dos tipos de café para tostar, moler y, posteriormente, mezclar. El de mayor calidad tiene un precio de 9 euros el kg, y el de menor vale 7,5 euros el kg. El comerciante quiere obtener una mezcla que salga a 8 euros y 40 céntimos el kg.

¿Cuál deberá ser la proporción de los dos tipos de café?

Sean x los kg de café de la primera calidad e y los kg de la segunda. Se tiene que:

$9x + 7{,}5y = 8{,}4(x + y)$. Por tanto, $9x + 7{,}5y = 8{,}4x + 8{,}4y \Rightarrow 0{,}6x = 0{,}9y \Rightarrow 2x = 3y \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$

Deberá mezclar tres partes de la primera calidad con dos de la segunda.

2.90. **El área de un rectángulo mide 12 cm². Si se forma un nuevo rectángulo cuyas dimensiones miden, respectivamente, 4 cm y 2 cm más que las del inicial, la nueva área resulta ser de 40 cm².**

Calcula las dimensiones de los dos rectángulos, así como sus perímetros.

Sean x e y las dimensiones del rectángulo inicial. Las dimensiones del nuevo rectángulo serán $x + 4$ e $y + 2$.

$$\begin{cases} xy = 12 \\ (x+4)(y+2) = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ 12 + 2x + 4y + 8 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 12 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow (10 - 2y)y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y^2 + 10y - 12 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \ x = 6 \\ y = 3, \ x = 4 \end{cases}$$

Se obtienen dos soluciones.

Primera solución: las dimensiones del rectángulo son 6 y 2 cm, y su perímetro, 16 cm.

Segunda solución: las dimensiones del rectángulo son 4 y 3 cm, y su perímetro, 14 cm.

2.91. **Halla tres números enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los dos primeros sea igual al cuadrado del tercero.**

Sean $x - 1$, x y $x + 1$ los tres números.

$$(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Los números pedidos son -1, 0 y 1, ó bien 3, 4 y 5.

2.92. **De un número impar se sabe que está comprendido entre 200 y 600, que la suma de sus cifras es 16 y que la segunda cifra es la suma de la primera y la tercera.**

¿Se puede determinar *x*, o hay más de una posibilidad? En este caso, ¿cuántas hay?

Sea $100a + 10b + c$ el número buscado. Como está comprendido entre 200 y 600, se tiene que $2 \leq a \leq 5$.

Además, $\begin{cases} a + b + c = 16 \\ b = a + c \end{cases} \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow \begin{cases} b = 8 \\ b = a + c \end{cases}$. Se tienen las siguientes posibilidades:

$a = 2$, $b = 8$, $c = 6 \Rightarrow$ El número buscado es 286.

$a = 3$, $b = 8$, $c = 5 \Rightarrow$ El número buscado es 385.

$a = 4$, $b = 8$, $c = 4 \Rightarrow$ El número buscado es 484.

$a = 5$, $b = 8$, $c = 3 \Rightarrow$ El número buscado es 583.

2.93. **Halla la expresión de un polinomio de tercer grado que verifique que:**

$P(0) = 0 \qquad P(1) = 0 \qquad P(-1) = 2 \qquad P(-2) = -6$

Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ el polinomio buscado. Se tiene que:

$$\begin{cases} P(0) = d = 0 \\ P(1) = a + b + c + d = 0 \\ P(-1) = -a + b - c + d = 2 \\ P(x) = -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} \quad E_2 + E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 2b = 2 \\ -a + b - c + d = 2 \\ -8a + 4b - 2c + d = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a + c = -1 \\ 8a + 2c = 10 \end{cases} \quad E_4 + 2E_3 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ b = 1 \\ a = 2 \\ c = -3 \end{cases}$$

El polinomio buscado es $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x$.

2.94. **Un ciclista está realizando un trayecto a favor del viento. En un primer tramo, el viento le ayuda a razón de 1 km/h, y en un segundo tramo le ayuda a razón de 2 km/h.**

El ciclista lleva una velocidad propia constante en todo el recorrido y tarda 2 horas y 36 minutos en hacer los 40 km. Posteriormente, en un mapa topográfico, el ciclista observa que los tramos están en la misma proporción que 3 a 2. Calcula la velocidad propia del ciclista.

Sea x la velocidad del ciclista. Sean y, $40 - y$ las longitudes de los tramos. El tiempo que el ciclista tarda en realizar el total del trayecto es: $\frac{y}{x+1} + \frac{40-y}{x+2} = 2{,}6$. La relación de los tramos es: $\frac{y}{40-y} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2y = 120 - 3y \Rightarrow y = 24$.

Por tanto, $\frac{24}{x+1} + \frac{16}{x+2} = 2{,}6 \Rightarrow 24x + 48 + 16x + 16 = 2{,}6(x^2 + 3x + 2) \Rightarrow 2{,}6x^2 - 32{,}2x - 58{,}8 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{32{,}2 \pm 40{,}6}{5{,}2} \Rightarrow \begin{cases} x = 14 \\ x = -\frac{21}{13} \text{ solución sin sentido} \end{cases}$$

La velocidad propia del ciclista es de 14 km/h.

PROFUNDIZACIÓN

2.95. a) Compara las soluciones de la ecuación de segundo grado $3x^2 - 4x - 4 = 0$ con las de la ecuación $-4x^2 - 4x + 3 = 0$.

b) Demuestra que las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + 2 = 0$ son inversas de la de la ecuación $2x^2 + bx + 1 = 0$.

c) Demuestra que las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ son inversas de las de la ecuación $cx^2 + bx + a = 0$.

a) $3x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 8}{6} \Rightarrow x = 2,\ x = -\frac{2}{3};\ -4x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 8}{-8} \Rightarrow x = -\frac{3}{2},\ x = \frac{1}{2}$

Las soluciones de una ecuación son inversas de las de la otra.

b) $x^2 + bx + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{2};\quad 2x^2 + bx + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 8}}{4}$

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Las soluciones son inversas una de la otra.

De la misma forma:

$$\frac{-b - \sqrt{b^2 - 8}}{2} \cdot \frac{-b + \sqrt{b^2 - 8}}{4} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 8)}{8} = \frac{b^2 - b^2 + 8}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

c) $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4ac} = \frac{4ac}{4ac} = 1$

Y de la misma forma con la otra pareja de soluciones.

2.96. Estudia si este sistema es compatible. $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = -4 \\ xy + xz + yz = -5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Para resolverlo se puede utilizar la siguiente identidad: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$.

Utilizando ahora las ecuaciones se sabe que $x^2 + y^2 = z^2 - 4$; y que $(xy + xz + yz = -5$; por tanto, sustituyendo en la identidad anterior se obtiene: $z^2 - 4 + z^2 + 2(-5) = 2^2 \Rightarrow z^2 = 9 \Rightarrow z = \pm 3$. De aquí se obtienen los sistemas:

$\underline{z = 3}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$ sin solución real $\qquad \underline{z = -3}$: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ ó $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

Al existir soluciones reales, el sistema es compatible.

2.97. Para equipar un polideportivo se quieren adquirir balones por valor de 500 euros. En el mercado existen balones de 40, 25 y 5 euros. Deben comprar por lo menos uno de cada y un total de 24 unidades. ¿Qué posibilidades tenemos?

Sean x, y, z el número de balones de 40, 25 y 5 euros, respectivamente, que se adquieren. Se tiene que:

$$\begin{cases} 40x + 25y + 5z = 500 \\ x + y + z = 24 \end{cases} \Rightarrow \{35x + 20y = 380 \Rightarrow 7x + 4y = 76 \Rightarrow y = \frac{76 - 7x}{4} = 19 - \frac{7x}{4}$$

Dando valores múltiplos de 4 a x se obtienen las soluciones.

Las únicas posibilidades para obtener tres números naturales son:

$\begin{cases} x = 4 \quad y = 12 \quad z = 8 \\ x = 8 \quad y = 5 \quad z = 11 \end{cases}$ Es decir, 4 de 40, 12 de 25 y 8 de 5
Es decir, 8 de 40, 5 de 25 y 11 de 5

2.98. **a) Calcula el valor de k para que el siguiente sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones.**

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = k \end{cases}$$

b) Para el valor de k anterior, escribe todas las soluciones.

a) $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 10 \\ 4x + 9y - 6z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ y + 2z = k - 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ y + 2z = 2 \\ 0z = k - 18 \end{cases}$

Para $k = 18$ se obtiene la ecuación $0 \cdot z = 0$, que se verifica para cualquier valor de z.

b) Las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por las fórmulas $\begin{cases} x + 4 + 2\lambda - 2 \cdot (2 - 2\lambda) = 6\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

2.99. **Calcula los valores de k para que el siguiente sistema sea incompatbile.** $\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = k \end{cases}$

$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 3x - 2y + z = 7 \\ 5x + 2y - 5z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ -8y + 10z = k - 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -8y + 10z = -2 \\ 0z = k - 13 \end{cases}$

Si k $\neq$ 13, la última ecuación no tiene sentido y, por tanto, el sistema no tiene solución.

2.100. **Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas.**

$$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ 2x - 2y - z + w = 5 \\ 3x + y - 2z - 4w = 16 \\ 3x - 3z = 3w = 15 \end{cases}$$

$\begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ 2x - 2y - z + w = 5 \\ 3x + y - 2z - 4w = 16 \\ 3x - 3z - 3w = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ -8y + 4z - 10w = -20 \\ -9y + 3z - 9w = -21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -3z - 45w = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z + 2w = 12 \\ -8y + 3z - 3w = -19 \\ z - 7w = -1 \\ -66w = 0 \end{cases} \Rightarrow w = 0 \quad z = -1 \quad y = 2 \quad x = 4$

2.101. **Un sistema de inecuaciones con una incógnita es un conjunto de inecuaciones que deben satisfacerse al mismo tiempo, de forma que la solución del sistema es la intersección de las soluciones de las ecuaciones individuales. Teniendo esto presente, resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.**

a) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x - (1 + x) \\ 3(x + 2) \geqslant 2(x - 4) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x \leqslant 6 \\ 3 - x > 2(x - 4) \\ 5x + 3 > -(x - 1) \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x - (1 + x) \\ 3(x + 2) \geqslant 2(x - 4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 0 \\ x \geqslant -14 \end{cases} \Rightarrow -14 \leqslant x < 0 \Rightarrow [-14, 0)$

b) $\begin{cases} x \leqslant 6 \\ 3 - x > 2(x - 4) \\ 5x + 3 > -(x - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 6 \\ 3x < 11 \\ 6x > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leqslant 6 \\ x < \dfrac{11}{3} \\ x > -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{11}{3} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$