Actividades

1. Representa los números reales:

a) $\frac{16}{9}$ **b)** $-0{,}47$ **c)** $\sqrt{13}$

a) Como $\frac{16}{9}=1+\frac{7}{9}$, dividimos el intervalo [1, 2] en nueve partes iguales, coincidiendo la séptima con el número dado.

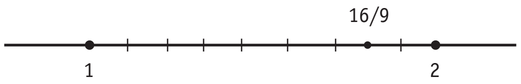

Fig. 2.1.

b) Hallamos el punto −0,47 mediante subdivisiones del intervalo [−1, 0] y posteriormente del [−0,5, −0,4]:

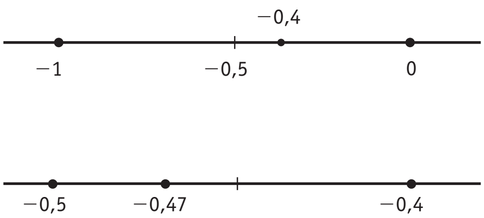

Fig. 2.2.

c) Procedemos a realizar la construcción gráfica de la Figura:

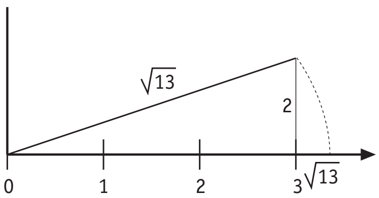

Fig. 2.3.

2. Encuentra y señala en la recta real los puntos cuya distancia a −1 es menor que 2.

Se tiene que los puntos x cuya distancia a −1 es menor que 2 verifican: $d(x,-1)<2 \Rightarrow |x-(-1)|=|x+1|<2 \Rightarrow -2<x+1<2 \Rightarrow -3<x<1 \Rightarrow x\in(-3,1)$

3. a) Redondea a centenas los datos: 1 897,67, 987 514 y 123.
b) Redondea a milésimas: 34,2345, 0,8765, 0,12345.
c) Calcula los errores absolutos y relativos cometidos en a).

a) Los redondeos a centenas serán:
1897,67≈1900; 987514≈987500; 123≈100

b) Ídem a milésimas:
34,2345 ≈ 34,235; 0,8765 ≈ 0,877; 0,12345 ≈ 10,123

c) Los errores absolutos (e) y relativos (E) cometidos en las aproximaciones del apartado (a) serán:
$e(1900)=1900-1897{,}67=2{,}33$ y

$$E(1\,900)=\frac{2,33}{1\,897{,}63}=\frac{233}{189\,763}=0{,}0012$$

$e(987500)=987\,514-987\,500=14$ y $E(987\,500)=\frac{14}{987\,514}=$ 0,00001

$e(100)=123-100=23$ y $E(100)=\frac{23}{123}=0{,}187$

4. Expresa en notación científica los números indicando su orden de magnigud:

a) $1\,234\cdot10^5$; **b)** 0,0000000067012;
c) $0{,}00763\cdot10^6$; **d)** $-527{,}05\cdot10^{-3}$

a) $1{,}234\cdot10^8$ Orden de magnitud 8
b) $6{,}7012\cdot10^{-9}$ Orden de magnitud −9
c) $7{,}63\cdot10^3$ Orden de magnitud 3
d) $-5{,}2705\cdot10^{-1}$ Orden de magnitud −1

5. i) Extrae factores:

a) $\sqrt{8a^5}$; **b)** $\sqrt[3]{81\cdot10^4\cdot x^6}$; **c)** $\sqrt{\frac{16a}{27}}$

ii) Introduce factores:

a) $2a^2\sqrt{\frac{a}{2}}$; **b)** $\frac{2}{x^3}\sqrt[3]{x^2}$; **c)** $(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

i) Extraemos los factores:

a) $\sqrt{8a^5}=\sqrt{2^2\,2\,(a^2)^2\,a}=2a^2\sqrt{2a}$

b) $\sqrt[3]{81\cdot10^4x^6}=\sqrt[3]{3^3 3\cdot10^3\cdot10\,(x^2)^3}=$
$=3\cdot10\cdot x^2\sqrt[3]{3\cdot10}=30x^2\cdot\sqrt[3]{30}$

c) $\sqrt{\frac{16a}{27}}=\sqrt{\frac{4^2\cdot a}{3^2\cdot3}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$

ii) Introducimos factores:

a) $2a^2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{(2a^2)^2}\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2^2a^4\frac{a}{2}}=\sqrt{2a^5}$

b) $\frac{2}{x^3}\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{(\frac{2}{x^3})^3}\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{\frac{2^3}{x^9}-x^2}=\sqrt[3]{\frac{2^3}{x^7}}$

c) $(x+1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{(x+1)^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=$
$=\sqrt{(x+1)^2\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{(x+1)(x-1)}=\sqrt{x^2-1}$

6. Halla el valor simplificado de:

a) $(\sqrt[5]{2})^5$ **b)** $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

a) $(\sqrt[5]{\ })^5=\sqrt[5]{2^5}=2$

b) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3a}}=\sqrt[12]{a^4}=\sqrt[3]{a}$

7. Extrae factores y suma:

a) $2\sqrt{3}+\frac{10}{3}\sqrt{27}-2\sqrt{108}$

b) $y^2\sqrt[3]{x^3y}+2y\sqrt[3]{x^3y^4}+\sqrt[3]{x^6y}$

c) $\dfrac{8\sqrt{72}-3\sqrt{288}-2\sqrt{338}}{7\sqrt{2}}$

a) $2\sqrt{3}+\dfrac{10}{3}\sqrt{27}-2\sqrt{108}=2\sqrt{3}+\dfrac{10}{3}\sqrt{3^3}-2\sqrt{3^3 2^2}=$

$=2\sqrt{3}+\dfrac{10}{3}3\sqrt{3}-2\cdot3\cdot2\sqrt{3}=(2+10-12)\sqrt{3}=0\cdot\sqrt{3}=0$

b) $y^2\sqrt[3]{x^3y}+2y\sqrt[3]{x^3y^4}+\sqrt[3]{x^6y}=$

$=y^2x\sqrt[3]{y}+2yxy\sqrt[3]{y}+x^2\sqrt[3]{y}=$

$(xy^2+2xy^2+x^2)\sqrt[3]{y}=(3xy^2+x^2)\sqrt[3]{y}$

c) $\dfrac{8\sqrt{72}-3\sqrt{288}-2\sqrt{338}}{7\sqrt{2}}=$

$=\dfrac{8\sqrt{6^2 2}-3\sqrt{12^2 2}-2\sqrt{13^2 2}}{7\sqrt{2}}=$

$\dfrac{8\cdot6\sqrt{2}-3\cdot12\sqrt{2}-2\cdot13\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}=$

$\dfrac{(48-36-26)\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}=\dfrac{14}{-7}=-2$

Problemas propuestos

Tipo I. Relación de orden y recta real. Operaciones

1. Calcula las potencias:

a) 3^{-3}, $(-3)^3$, $(-3)^{-3}$, -3^{-3}

b) $(1/3)^{-3}$, $(-1/3)^3$, $-(-1/3)^{-3}$

c) $3^{-1}-(1/3)^{-1}$

d) $\dfrac{5^{-1}-5^0}{-5^{-1}+5^0}$

e) $\left(\dfrac{1^{-1}-(-1)^{-1}}{-1^{-1}+1^0}\right)^{-1}$

a) $3^{-3}=\dfrac{1}{3^3}=\dfrac{1}{27}$; $(-3)^3=-27$; $(-3)^{-3}=\dfrac{1}{(-3)^3}=-\dfrac{1}{27}$;

$-3^{-3}=\dfrac{-1}{3^3}=-\dfrac{1}{27}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=3^3=27$; $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{-1}{3^3}=\dfrac{-1}{27}$; $-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}=(-3)^3=27$

c) $3^{-1}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=\dfrac{1}{3}-3=-\dfrac{8}{3}$

d) $\dfrac{5^{-1}-5^0}{-5^{-1}+5^0}=-\dfrac{5^{-1}-5^0}{5^{-1}-5^0}=-1$

e) $\left(\dfrac{1^{-1}-(-1)^{-1}}{-1^{-1}+1^0}\right)^{-1}=\left(\dfrac{-1+1}{1+1}\right)^1=\dfrac{0}{2}=0$

2. Simplifica y no dejes exponentes negativos:

a) $(8a^{-1}b^2)^{-2}$ **b)** $\dfrac{(a^{-1})^2(-b)^3}{(-ab)^{-2}}$

c) $\dfrac{(-a)^{-3}(2b)^{-1}}{4ab^{-3}}$

a) $(8a^{-1}b^2)^{-2}=8^{-2}a^2b^{-4}=\dfrac{a^2}{8^2b^4}$

b) $\dfrac{(a^{-1})^2(-b)}{(-ab)^{-2}}=-\dfrac{a^{-2}b^3}{\frac{1}{a^2b^2}}=\dfrac{-b^5}{1}=-b^5$

c) $\dfrac{(-a)^{-3}(2b)^{-1}}{4ab^{-3}}=\dfrac{-1/a^3\ 1/2b}{4a/b^3}=-\dfrac{b^3}{4a^4 2b}=-\dfrac{b^2}{8a^4}$

3. Simplifica y da el resultado en forma radical:

a) $5a^{1/3}\ 2a^{1/2}$ **b)** $(16a^{-2/3}b^{2/3})^{1/2}$

c) $\left(\dfrac{2x^{-1}y^{1/2}}{x^{-1/2}y^{2/3}}\right)^6$

a) $5a^{1/3}\ 2a^{1/2}=5\cdot2a^{1/3+1/2}=10a^{5/6}=10\sqrt[6]{a^5}$

b) $(16a^{-2/3}b^{2/3})^{1/2}=16a^{1/2}a^{-1/3}b^{1/3}=4\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}=4\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$

c) $\left(\dfrac{2x^{-1}y^{1/2}}{x^{-1/2}y^{2/3}}\right)^6=\dfrac{2^6x^{-6}y^3}{x^{-3}y^4}=\dfrac{64}{x^3y}$

4. Asigna cada número al conjunto o conjuntos que pertenezca según se hace en la primera línea:

	N	Z	Q	I
-3		x	x	
1,18				
$\sqrt{5}$				
6/12				
$\sqrt{25}$				
π				

	N	Z	Q	I
-3		x	x	
1,18			x	
$\sqrt{5}$				x
6/12			x	
$\sqrt{25}$	x	x	x	
π				x

5. Escribe tres números entre:

a) $3,\overline{37}$ y 3,37602 **b)** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\dfrac{18}{11}$

c) $\sqrt{\dfrac{36}{7}}$ y $\sqrt[3]{11,4}$

a) $3,\overline{37}<3,374<3,375<3,376<3,37602$

b) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi=1,61803<1,60804<1,61<1,62<\dfrac{18}{11}=1,63$

c) $\sqrt{\dfrac{36}{7}}=2,2677<2,26>2,255<2,2507>\sqrt[3]{11,4}=2,2506$

6. Decide la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones mediante ejemplos:

a) La suma de número racional e irracional es irracional.
b) El producto de número racional e irracional es irracional.
c) El producto de dos números irracionales es irracional.

a) La suma de número racional e irracional es irracional: verdad, $2+\pi$.
b) El producto de número racional e irracional es irracional: verdad, $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.
c) El producto de dos números irracionales es irracional: falso, $\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=3$.

7. Prueba que si que $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ entonces $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Si $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\Rightarrow ad<bc$ (*), entonces:

- $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$ ya que por (*): $a(b+d) = ab+ad < b(a+c) = ba+bc$
- y $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ pues por (*) de nuevo: $(a+c)d = ad+cd < (b+d)c = bc + dc$

8. Demuestra que para todo número $a > 0$ se cumple que $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$.

Las siguientes desigualdades son equivalentes:
$a+\frac{1}{a}\geqslant 2 \Leftrightarrow a^2+1\geqslant 2a \Leftrightarrow a^2+1-2a\geqslant 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geqslant 0$
Como la última desigualdad es cierta, también lo será la primera.
Nota: Puede hacerse ver la necesidad de que a sea positivo; pues si fuese negativo, la primera equivalencia no sería correcta.

9. Halla qué números representan las abscisas *A*, *B*, *C* y *D* de la figura.

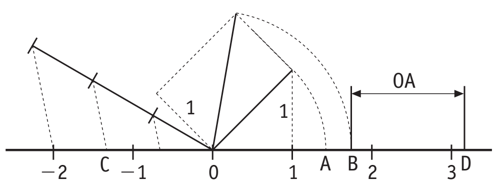

Fig. 2.4.

El intervalo $[-2, 0]$ se divide en tres partes, luego el punto C corresponde a $-\frac{4}{3}$.
Por otro lado, de la construcción geométrica, aplicando el teorema de Pitágoras, B es $\sqrt{(\sqrt{2}^2)+1^2}=\sqrt{3}$ y D se obtiene sumando a B la distancia $OA=\sqrt{2}$, por tanto la abscisa que corresponde a D es $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

10. Comprueba que la longitud del segmento *AB* es Φ, siendo *M* el punto medio del lado del cuadrado.

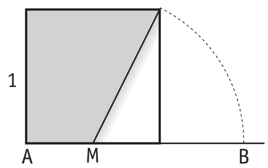

Fig. 2.5.

De nuevo utilizamos el teorema de Pitágoras: como MB $=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$, la distancia AB $=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ que es el valor del número áureo.

11. Ordena los números $\frac{1}{a}$, a^2, $-b$, $\sqrt{a}$, $\frac{1}{b}$, $\sqrt{b}$, b^2, $-a$,
a) Suponiendo que $1 < a < b$.
b) Si $0 < a < b < 1$.

a) $-b<-a<1/b<1/a<\sqrt{a}<\sqrt{b}<b^2$.
a^2 no podemos situarlo.
b) $-b<-a<a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{b}<1/b<1/a$.
b^2 no podemos situarlo.

12. Escribe en forma de intervalo y representa en la recta real, los conjuntos:
a) $A = \{x\in R|\ x < -1\}$
b) $B = \{x\in R|\ x < 1/2$ y $x\geqslant -0{,}5\}$
c) $C = \{x\in R|\ x\leqslant 1$ y $x > 3\}$
d) $D = \{x\in R|\ -2{,}5\leqslant x < 1{,}2\}$

a) $(-\infty, -1)$
b) $[-1/2,$
c) ϕ,
d) $[-5/2, 6/5)$

13. Escribe la desigualdad que cumplen los números que pertenecen a los intervalos:
a) $(-\infty, 2]$ **b) $[2, 5]$**
c) $(-1, 3)\cup[0, \infty)$ **d) $[0, 3)\cap(-1, 1]$**

a) $\{x, x\leqslant 2\}$
b) $\{x, 2\leqslant x\leqslant 5\}$
c) $\{x, -1< x<\infty\}$
d) $\{x, 0\leqslant x\leqslant 1\}$

14. Escribe en forma de desigualdad y de intervalo los números que verifican:
a) $|x|\leqslant 3$ **b) $|x|\geqslant 3$**
c) $\frac{5}{|x|}\geqslant 0$ **d) $|x-1|\leqslant 0$**

a) $\{x, -3\leqslant x\leqslant 3\}\Leftrightarrow[-3, 3]$
b) $\{x, x\leqslant -3$ o $x\geqslant 3\}\Leftrightarrow(-\infty, -3]\cup[3, \infty)$
c) $\mathbf{R}-\{0$
d) Dado que la desigualdad incluye la igualdad: $\{1\} = [1, 1]$.

15. Encuentra los intervalos unión e intersección de:
a) $I = \{x\in R, x + 1 < 1\}$ y $J = [-1, 2)$.
b) $K = \{x\in R, |x-1|\geqslant 2\}$ y $L = \{x, |x+2|\leqslant 2\}$.
c) $M = (-\infty, 2]$ y $N = \{x\in R, |x-3|=2\}$.

a) $I \cup J = (-2, 0) \cup ([-1, 2) = (-2, 2)$ $\qquad I \cap J = [-1, 0)$
b) $K \cup L = (-\infty, -1] \cup [3, \infty) \cup [-4, 0]$
c) $M \cup N = (-\infty, 2] \cup \{5\} \cup \{1\} = (-\infty, 2] \cup \{5\}$; $M \cap N = \{1\}$

16. Halla y representa en la recta real los números que distan de −1 menos de 2 unidades

$d(x, -1) = |x-(-1)| = |x+1| < 2 \Rightarrow -2 < x+1 < 2 \Rightarrow$
$-3 < x < 1 \Leftrightarrow (-3, 1)$

Tipo II. Notación científica. Números aproximados

17. i) Redondea a unidades:
a) 0,854 b) 115,06 c) −1 546,7
ii) Redondea a milésimas:
d) −0,0996 e) 56,4444 f) 1,897645

Al redondear a unidades, despreciamos la primera cifra decimal, por tanto:
a) $0{,}854 \approx 1$
b) $115{,}06 \approx 115$
c) $-1546{,}7 \approx -1547$

En el redondeo a milésimas, ésta es la última cifra conservada, luego:
d) $-0{,}0996 \approx -0{,}1$
e) $56{,}4444 \approx 56{,}444$
f) $1{,}897645 \approx 1{,}898$

18. Indica a qué intervalo pertenecen los números cuyo redondeo a centésimas es 1,23.

El intervalo sería: (1,225, 1,235) pues en él la distancia $d(x, 1{,}23) < 0{,}01$. También debería incluirse 1,225.

19. Si 1,23 es la medida de una magnitud en la que hemos cometido un error relativo máximo del 10% ¿entre qué valores está comprendido el valor exacto de la magnitud?

El error relativo es:
$E = \dfrac{|x-1{,}23|}{x} < 0{,}1 \Leftrightarrow -0{,}1 < \dfrac{x-1{,}23}{x} < 0{,}1$ y de la primera desigualdad:
$-\dfrac{x}{10} < x - 1{,}23 \Leftrightarrow 1{,}23 < \dfrac{11x}{10} \Leftrightarrow x > \dfrac{12{,}3}{11} = \dfrac{123}{110}$
de la segunda desigualdad:
$E = \dfrac{x-1{,}23}{x} < 0{,}1 \Leftrightarrow -1{,}23 < \dfrac{x}{10} - x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 1{,}23 > \dfrac{9x}{10} \Leftrightarrow x < \dfrac{12{,}3}{9} = \dfrac{123}{90}$
La magnitud está en el intervalo: (123/110, 123/90)

20. Calcula empleando la notación científica
a) $1{,}27653 \cdot (0{,}00006584)^3$
b) $\dfrac{37 \cdot 10^{-4}}{4\,125\,000}$

a) $1{,}27653 \cdot (0{,}00006584)^3$ que en la pantalla de la calculadora da: $3{,}643347-13 = 3{,}643347 \cdot 10^{-13}$

b) $\dfrac{37 \cdot 10^{-4}}{4\,125\,000} = 8{,}969697-10 = 8{,}969697 \cdot 10^{-10}$

21. La capacidad de memoria del disco duro de un ordenador se mide en gigabytes (Gb). Cada Gb tiene 10^9 bytes o unidades básicas de almacenamiento, de forma que cada byte contiene un símbolo (dígito, letra, etc.). Si por término medio una "palabra" está compuesta de 6 símbolos, estima cuántas palabras puede archivar un ordenador de 20 Gigabytes (Giga = 10^9).

$20\text{ GB} = 20 \cdot 10^9$ Bytes Como cada "palabra" ocupa 6 bytes, se tiene que la memoria puede almacenar $\dfrac{20 \cdot 10^9}{6} = \dfrac{10^{10}}{3} = 3{,}\overline{3} \cdot 10^9$
Algo más de 3 millardos de palabras.

Tipo III. Simplificación y Operaciones con radicales.

22. Reduce a una sola potencia fraccionaria:
a) $\sqrt{a} \cdot a^{2/3}$ b) $(\sqrt{a})^{1/2}$
c) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ d) $2 \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{32}}$

a) $a^{1/2+1/3} = a^{7/6}$
b) $a^{1/2\ 1/2} = a^{1/4}$
c) $(a \cdot a^{1/2})^{1/2} = a^{1/2+1/4} = a^{3/4}$
d) $2 \cdot 2^{3/2} \cdot 2^{-5/2} = 2^0 = 1$

23. Utilizando la calculadora, halla el valor de los radicales:
a) $\sqrt[3]{5^6}$ b) $\sqrt[4]{5}$
c) $\sqrt[5]{0{,}05}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{28}}{\sqrt{2{,}16}}$

a) $5^2 = 25$
b) 1,4953…
c) 0,54928…
d) 2,06613…

24. Halla, sin utilizar calculadora, el valor de:
a) $\sqrt{\dfrac{10}{0{,}1}169}$ b) $\sqrt{144\dfrac{0{,}09}{100}}$
c) $\sqrt{81 \cdot 144 \cdot 400}$ d) $\sqrt[3]{-8 \cdot 27 \cdot 64}$

a) $\sqrt{\dfrac{10}{0{,}1}169} = \sqrt{10^2 \cdot 169} = \sqrt{10^2}\sqrt{169} = 10 \cdot 13 = 130$
b) $\sqrt{144\dfrac{0{,}09}{100}} = \sqrt{144}\dfrac{\sqrt{0{,}09}}{\sqrt{100}} = 12\dfrac{0{,}3}{10} = 0{,}36$
c) $\sqrt{81 \cdot 144 \cdot 400} = \sqrt{81}\sqrt{144}\sqrt{400} = 9 \cdot 12 \cdot 20 = 2\,160$
d) $\sqrt[3]{-8 \cdot 27 \cdot 64} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{64} = -2 \cdot 3 \cdot 4 = -24$

25. Reduce a índice común, divide y simplifica:
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}}{\sqrt[4]{8}}$

c) $\sqrt[6]{2}\ \dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3^{-3}}}$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[6]{2^2}}=\sqrt[6]{\dfrac{27}{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{20}}{\sqrt[4]{8}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{20^2}}{\sqrt[4]{8}}=\sqrt[4]{200}$

c) $\sqrt[6]{2}=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3^{-3}}}=\sqrt[6]{2}=\dfrac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt{3^{-3}}}=\dfrac{\sqrt[12]{2^2\cdot 6^3}}{\sqrt[12]{3^{-18}}}=\sqrt[12]{2^5\cdot 3^{21}}$

26. Calcula y simplifica:

a) $\sqrt{\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}$

b) $\sqrt[3]{(-1)^3\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{-1}}+1}$

a) $\sqrt{\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\sqrt[8]{\sqrt[3]{a^6a^2}}=\sqrt[24]{a^8}=\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt[3]{(-1)^3\cdot\sqrt[5]{\sqrt[3]{-1}}+1}=\sqrt[3]{\sqrt[15]{(-1)^{46}}+1}=\sqrt[45]{1}+1=1+1=2$

27. Reduce todo lo posible las sumas:

a) $(1-2\sqrt{2})^2-(1+2\sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{5}-2)\cdot(\sqrt{5}+2)+(2\sqrt{2})^2$

a) $(1-2\sqrt{2})^2-(1+2\sqrt{2})^2=1+8-4\sqrt{2}-1-8-4\sqrt{2}=-8\sqrt{2}$

b) $(\sqrt{5}-2)\cdot(\sqrt{5}+2)+(2\sqrt{2})^2=5-4+8=9$

28. Demuestra que $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}=2$

Elevamos al cuadrado los dos miembros de la igualdad y resulta:

$(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})^2=2^2\Rightarrow$

$\Rightarrow 4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=4\Rightarrow$

$\Rightarrow 8-2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})}=4\Rightarrow 8-2\sqrt{4^2-2^2\cdot 3}=4\Rightarrow$

$\Rightarrow 8-2\sqrt{4}=4\Rightarrow 8-4=4$

29. Demuestra que $(xy+z)^2\leqslant(x^2+z^2)(y^2+1)$**, y comprueba la desigualdad para** $x=2$ **e** $y=z=\sqrt{3}$

Para demostrar que $(xy+z)^2\leqslant(x^2+z^2)(y^2+1)$ vamos a desarrollar los dos términos de la desigualdad para ver que se cumple realmente:

$(xy+z)^2=x^2y^2+z^2+2xyz$

$(x^2+z^2)(y^2+1)=x^2y^2+z^2y^2+x^2+z^2$

Si se cumple la desigualdad debería ser:

$x^2y^2+z^2+2xyz\leqslant x^2y^2+z^2y^2+x^2+z^2\Leftrightarrow$

$2xyz\leqslant z^2y^2+x^2\Leftrightarrow 0\leqslant x^2-2xyz+z^2y^2$

Y podemos agrupar en el siguiente cuadrado: $(x-zy)^2\geqslant 0$ que se cumple siempre. Luego la desigualdad de partida es cierta.

Tipo IV. Suma de radicales semejantes

30. Reduce las sumas:

a) $-4\sqrt{\dfrac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\dfrac{7}{3}\sqrt{27}-\sqrt{\dfrac{48}{9}}$

b) $-2\sqrt{\dfrac{20}{27}}+\sqrt{\dfrac{125}{3}}-\dfrac{6}{5}\sqrt{\dfrac{45}{12}}-3\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

c) $2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}$

a) $-4\sqrt{\dfrac{75}{4}}+2\sqrt{3}-\dfrac{7}{3}\sqrt{27}-\sqrt{\dfrac{48}{9}}=$

$2\cdot 5\sqrt{3}+2\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}=5\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{3}=\dfrac{19}{3}\sqrt{3}$

b) $-2\sqrt{\dfrac{20}{27}}+\sqrt{\dfrac{125}{3}}-\dfrac{6}{5}\sqrt{\dfrac{45}{12}}-3\sqrt{\dfrac{5}{3}}=$

$-2\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}}+5\sqrt{\dfrac{5}{3}}-\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{5}{3}}-3\sqrt{\dfrac{5}{3}}=$

$=(-\dfrac{4}{3}+5-\dfrac{9}{5}-3)\sqrt{\dfrac{5}{3}}=-\dfrac{17}{15}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

c) $2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+5\sqrt[3]{128}=2\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{2}+5\cdot 2^2\sqrt[3]{2}=20\sqrt[3]{2}$

31. Suma, simplificando todo lo posible:

a) $2\sqrt{x^3y}-2\sqrt{xy^3}+3\sqrt{(xy)^3}-\sqrt{16xy}$

b) $\sqrt{a^3-a^2b}+\sqrt{(a-b)(a^2-2ab+b^2)}+\sqrt{ab^2-b^3}$

a) $2\sqrt{x^3y}-2\sqrt{xy^3}+3\sqrt{(xy)^3}-\sqrt{16xy}=$

$=2x\sqrt{xy}-2y\sqrt{xy}+3xy\sqrt{xy}-4\sqrt{xy}=(2x-2y+3xy-4)\sqrt{xy}$

b) $\sqrt{a^3-a^2b}+\sqrt{(a-b)(a^2-2ab+b^2)}+\sqrt{ab^2-b^3}=$

$=\sqrt{a^2(a-b)}+\sqrt{(a-b)(a-b)^2}+\sqrt{b^2(a-b)}=$

$=(a+a-b+b)\sqrt{a-b}=2a\sqrt{a-b}$

Tipo V. Racionalización

32. Racionaliza:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ **b)** $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ **e)** $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}\right)^2$

a) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{16}}{4\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{(1-\sqrt{3})\sqrt{3}}{2\cdot 3}=\dfrac{\sqrt{3}-6}{6}$

e) $\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3}}\right)^2=\dfrac{x^4}{x^3}=x$

33. Racionaliza las fracciones:

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ **d)** $\dfrac{3+2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{1-3}=\dfrac{\sqrt{3}-3}{-2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-2}=\dfrac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{2\cdot 4}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$

d) $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}=\dfrac{(3+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{6})(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}=$

$=\dfrac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+4\sqrt{3^2}+2\sqrt{3}\sqrt{6}}{2^2\sqrt{3^2}-\sqrt{6^2}}=$

$=\dfrac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+12+2\sqrt{18}}{6}=\dfrac{6\sqrt{3}+3\sqrt{6}+12+6\sqrt{2}}{6}=$

$=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

34. Calcula:

a) $\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{80}-2\sqrt{125}}{\sqrt{40}}$

b) $\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{150}+4\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$

a) Sumamos en el numerador y simplificamos:

$\dfrac{\sqrt{20}+\sqrt{80}-2\sqrt{125}}{\sqrt{40}}=\dfrac{2\sqrt{5}+4\sqrt{5}-2\cdot 5\sqrt{5}}{2\sqrt{10}}=$

$=\dfrac{-4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}\sqrt{5}}=\dfrac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$

b) Operamos como en a):

$\dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{150}+4\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2^2\cdot 6}-\sqrt{5^2\cdot 6}+4\sqrt{3^2\cdot 6}}{\sqrt{6}}=$

$=\dfrac{(2-5+12)\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=9$

35. Suma y simplifica $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{5}{\sqrt{3}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2}-\dfrac{5}{\sqrt{3}+3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}(2\sqrt{3}+2)}{(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)}-\dfrac{5(\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=$

$=\dfrac{2\cdot 3+2\sqrt{3}}{2^2\sqrt{3^2}-2^2}-\dfrac{5\sqrt{3}-15}{\sqrt{3^2}-3^2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=$

$=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{8}-\dfrac{5\sqrt{3}-15}{-6}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=$

$=\dfrac{18+6\sqrt{3}+20\sqrt{3}-60+16\sqrt{3}}{24}=\dfrac{-42+42\sqrt{3}}{24}=$

$=\dfrac{21\sqrt{3}-21}{12}=\dfrac{21}{12}(\sqrt{3}-1)$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. ¿En qué se diferencian los números racionales de los irracionales? Pon un ejemplo.

Los irracionales no se pueden expresar en forma de fracción.

2. Escribe sin las barras de valor absoluto la expresión:

a) $|x+1|$ **si** $x>-1$

b) $|x(x+x^3)|$

a) $|x+1|=x+1$ pues al ser $x>-1$, $x+1>0$

b) $|x(x+x^3)|=|x^2+x^4|=x^2+x^4$ pues ambas potencias son positivas siempre.

3. Simplifica la expresión $\dfrac{-[a-(c-a)]x-cx}{-a(-x)}$

$\dfrac{-[a-(c-a)]x-cx}{-a(-x)}=$

$\dfrac{(-a+c-a)x-cx}{ax}=\dfrac{(c-2a-c)x}{ax}=\dfrac{-2ax}{ax}=-2$

4. Redondea a milésimas:

a) −3,9525

b) 0,1672

c) 0,9999

a) $-3{,}9525\approx -3{,}953$

b) $0{,}1672\approx 0{,}167$

c) $0{,}9999\approx 1$

5. Escribe en notación decimal:

−3,21 7

0,05 −4

$-3{,}21\cdot 10^7=-32100000$

$0{,}05\cdot 10^{-4}=0{,}000005$

6. Calcula el valor

a) $\sqrt[4]{2^8}$

b) $\sqrt{6^2+8^2}$

a) $\sqrt[4]{2^8}=2^2=4$

b) $\sqrt{2^2+8^2}=\sqrt{100}=10$

7. Suma $\sqrt{80}+\frac{2}{3}\sqrt{45}$

$$\sqrt{80}+\frac{2}{3}\sqrt{45} = \sqrt{4^2 5}+\frac{2}{3}\sqrt{3^2 5}=4\sqrt{5}+2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$$

8. Reduce a un solo radical: $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}$

$$\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^2}}=\frac{\sqrt[4]{x^6}}{\sqrt[4]{x^2}}=\sqrt[4]{\frac{x^6}{x^2}}=\sqrt[4]{x^4}=x$$

9. Escribe con una sola raíz y simplifica: $\sqrt{a - \sqrt[3]{a}}$

$$\sqrt{a - \sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3 a}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$$

10. Racionaliza: $\frac{-2}{2-\sqrt{5}}$

$$\frac{-2}{2-\sqrt{5}}=\frac{-2(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}=\frac{-2(2+\sqrt{5})}{4-5}=2(2+\sqrt{5})$$

Actividades

1. Halla:

a) $(2x-4)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+4\right)$ **b)** $(x+3)^2-(x-3)^2$

c) $(x-1)\cdot(x^2+2)^2-(1+2x)^2$

a) $\frac{1}{2}x^3-x^3+10x-x^2+2x-20=\frac{1}{2}x^3-2x^2+12x-20$

b) $x^2+6x+9-(x^2-6x+9)=12x$

c) $(x-1)\cdot(x^4+4x^2+4)-(1+4x+4x^2)=x^5-x^4+4x^3-8x^2-5$

2. Descompón en factores los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^2+4x-21$

b) $P(x)=x^3-2x^2-3x$

c) $P(x)=6x^4-7x^3+x$

a) $x^2+4x-21=0 \Rightarrow x=3,\ x=-7 \Rightarrow P(x)=(x-3)(x+7)$

b) $P(x)=x^3-2x^2-3x=x(x^2-2x-3)=x(x+1)(x-3)$

c) $P(x)=6x^4-7x^3+x=x(6x^3-7x^2+1)$.

Una solución de $6x^3-7x^2+1=0$ es $x=1$.

$(6x^3-7x^2+1)/(x-1)\ \rightarrow$

	6	−7	0	1
1		6	−1	−1
	6	−1	−1	0

Se tiene: $P(x)=x(x-1)(6x^2-x-1)=6x(x-1)(x-1/2)(x+1/3)$

Las raíces de $6x^2-x-1=m=$ son $x=1/2$ y $x=-1/3$.

3. Halla las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas:

a) $\frac{1-x}{x+2}-\frac{2x-1}{x-2}+\frac{2x}{x^2-4}$ **b)** $x-2-\frac{x-1}{x^2+1}$

c) $\frac{2x^2-4}{x+1}-\frac{2x}{x+3}$

a) $\frac{(1-x)(x-2)-(2x-1)(x+2)+2x}{x^2-4}=\frac{-3x^2+2x}{x^2-4}$

b) $\frac{(x-2)(x^2+1)-(x-1)}{x^2+1}=\frac{x^3-2x^2-1}{x^2+1}$

c) $\frac{(2x^2-4)(x+3)-2x(x+1)}{(x+1)(x+3)}=\frac{2x^3+4x^2-6x-12}{x^2+4x+3}$

4. Halla las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-1}{x-3}\cdot\frac{x+3}{5}$ **b)** $\frac{2}{3}\cdot\frac{3x-2}{5x}$

c) $\frac{2x-1}{\frac{x^2-3}{2x+1}}$ **d)** $\frac{x^2+3}{2}:\frac{x+3}{6}$

a) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{5x-15}$ b) $\frac{6x-4}{15x}$

c) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{x^2-3}=\frac{4x^2-1}{x^2-3}$ d) $\frac{6(x^2+3)}{2(x+3)}=\frac{3(x^2+3)}{x+3}$

5. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{4-4x^2+4x^4}{1-x}$ **b)** $\frac{2x^3-6x+4}{2x+4}$

c) $\frac{2x(x-3)^2-2x^2(x-3)}{(x-3)^4}$

a) Es irreducible.

b) $\frac{2(x^3-3x+2)}{2(x+2)}=\frac{2(x+2)(x^2-2x+1)}{2(x+2)}=(x-1)^2$

c) $\frac{2x(x-3)^2-2x^2(x-3)}{(x-3)^4}=\frac{2x(x-3)-2x^2}{(x-3)^3}=\frac{2x^2-6x-2x^2}{(x-3)^3}=\frac{-6x}{(x-3)^3}$

6. Expresa como una sola raíz:

a) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ **b)** $\frac{x}{2\sqrt{x}}$ **c)** $\frac{\sqrt{x+1}}{x}$ **d)** $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$

a) $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{x+1}{x}}$ b) $\frac{x}{2\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}}{2x}=\frac{1}{2}\sqrt{x}$

c) $\frac{\sqrt{x+1}}{x}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$

d) $\frac{x+1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{x}}=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x}}$

Problemas propuestos

Tipo I. Operaciones con polinomios

1. Calcula:

a) $(31x-6x^2+5x^3)-(12x^3-6x^2+x)$

b) $(8x^4-9x^3+1)-(2x+3x^3-5x^4)$

c) $\left(2x^3-\frac{1}{2}x^2+3\right)-\left(\frac{3}{4}x^2+5x-\frac{1}{3}\right)$

a) $-7x^3+30x$

b) $13x^4-12x^3-2x+1$

c) $2x^3-\frac{5}{4}x^2-5x+\frac{10}{3}$

2. Calcula:

a) $(4x+5)-(2+x)^2+(2x)^2$

b) $(2-3x)^2-5[(3x-1)\cdot(3x+1)-2x]$

c) $3x^6\cdot 4x^5-(-2x^5)\cdot(-14x^3)+(2x^5)\cdot(-3x^4)-x^6\cdot(-4x^2)$

a) $(4x+5)-(2+x)^2+(2x)^2=4x+5-(4+4x+x^2)+4x^2=1+3x^2$

b) $(2-3x)^2-5[(3x-1)\cdot(3x+1)-2x]=$
$(4-12x+9x^2)-5(9x^2-1-2x)=-36x^2-2x+9$

c) $12x^{11}-28x^8-6x^9+4x^8=12x^{11}-6x^9-24x^8$

Nota: Los errores al efectuar las dos primeras operaciones son muy frecuentes, sobre todo cuando éstas se hacen fuera del contexto teórico. Un error puede ser: $(2+x)^2=2^2+x^2=4+x^2$; otro: $(2x)^2=2x^2$.

3. Halla:

a) $(x-6)^2$ **b)** $(4+x^2)^2$

c) $(3x+1)^2$ **d)** $(2x-1)^2$

e) $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{2}x-5\right)$ **f)** $(4x-1)(4x+1)$

a) $x^2 - 12x + 36$ b) $16 + 8x^2 + x^4$ c) $9x^2 + 6x + 1$

d) $4x^2 - 4x + 1$ e) $\frac{1}{4}x^2 - 25$ f) $16x^2 - 1$

4. Haz las siguientes multiplicaciones de polinomios:

a) $(5x^2+3x-5)(7x^3-6x+3)$

b) $\left(x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}\right)(x^2-5x-14)$

c) $\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)$

a) $35x^5 + 21x^4 - 65x^3 - 3x^2 + 39x - 15$

b) $x^4-\frac{21}{4}x^3-\frac{105}{8}x^2+\frac{43}{8}x+\frac{21}{4}$

c) $\frac{2}{3}x^3\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)-\frac{1}{4}x^2\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)+$

$+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}x^2+x-\frac{4}{5}\right)=-x^5+\frac{2}{3}x^4-\frac{8}{15}x^3+\frac{3}{8}x^4-$

$-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{5}x^2-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}=$

$=-x^5+\frac{25}{24}x^4-\frac{47}{60}x^3-\frac{11}{20}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2}{5}$

5. Divide:

a) $(5x^4 - 14 + 5x + x^3) : (3 - x^2)$

b) $(20x^3+12x^4+29-39x^2-28x):(4x^2-5)$

c) $(2x^3-3x+2):(2x-1)$

a) Se ordenan los términos del dividendo y los del divisor en orden decreciente de sus grados. Dejamos en blanco el espacio correspondiente a $0\cdot x^3$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
5x^4 & +x^3 & & +5x & -14 & -x^2+3 \\ \cline{6-6}
-5x^4 & & +15x^2 & & & -5x^2-x-15 \\ \cline{1-3}
 & +x^3 & +15x^2 & +5x & & \\
 & -x^3 & & +3x & & \\ \cline{2-4}
 & & +15x^2 & +8x & -14 & \\
 & & -15x^2 & & +45 & \\ \cline{3-5}
 & & & 8x & +31 &
\end{array}
$$

Cociente: $-5x^2 - x - 15$

Resto: $8x + 31$

Por tanto: $5x^4 + x^3 + 5x - 14 = (-x^2 + 3)\cdot$
$\cdot(-5x^2 - x - 15) + (8x + 31)$

b) Cociente: $3x^2 + 5x - 6$

Resto: $-3x - 1$

c) Cociente: $x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

Resto: $\frac{3}{4}$

Tipo II. Regla de Ruffini. Teorema del resto y factorización

6. Utiliza la regla de Ruffini para hacer las siguientes divisiones:

a) $(x^7 - x)$ entre $(x + 2)$ **b) $(x^5+x-2x^3):(x-1)$**

c) $(2x^3-x^5-3x):(x-3)$ **d) $(3x^4-6):(x+1)$**

a) Recuerda que cuando falta un término se pone un cero. Esto es:
$x^7 - x = x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - x + 0$
El divisor $x + 2 = x - (-2)$, o sea, $a = -2$. Con esto se forma el esquema:

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
-2 & & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 64 & -126 \\ \hline
 & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 63 & -126
\end{array}
$$

Los coeficientes del cociente, que será un polinomio de grado sexto, en orden decreciente, valen 1, −2, 4, −8, 16, −32 y 63. El resto es −126.

Luego:
$C(x) = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 63$
$R(x) = -126$

b) Cociente: $x^4 + x^3 - x^2 - x$
Resto: 0

c) Cociente: $-x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 21x - 66$
Resto: -198

d) Cociente: $3x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
Resto: -3

7. Descompón en factores el polinomio $P(x)=2x^3-10x^2+14x-6$, sabiendo que $x = 1$ es una de sus raíces.

Si $x = 1$ es una raíz $\Rightarrow$ $(x - 1)$ es un factor $\Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - 1)$. Se divide por Ruffini y se obtiene:
$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=(x-1)(2x^2-8x+6)=$
$2(x-1)(x^2-4x+3)$.
Los otros dos factores se obtienen resolviendo la ecuación $x^2-4x+3=0$. Sus soluciones son $x=1$ y $x=3$ $\Rightarrow$ $(x-1)$ y $(x-3)$ son los factores.
Por tanto,
$P(x)=2x^3-10x^2+14x-6=2(x-1)(x-1)(x-3)=$
$=2(x-1)^2(x-3)$.

8. Halla un polinomio de segundo grado sabiendo que una de sus raíces es $x = -5$ y que $P(2) = -7$

$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ siendo x_1 y x_2 sus raíces.
Si $x_1 = -5 \Rightarrow P(x) = (x + 5)(x - x_2)$
Si $P(2) = -7 \Rightarrow (2 + 5)(2 - x_2) = -7 \Rightarrow x_2 = 3$
Por tanto, $P(x) = (x + 5)(x - 3) = x^2 + 2x - 15$

9. Escribe un polinomio de cuarto grado que tenga por raíces:

a) 1, 2, 3 y 4 **b) 1, 2 y 3 doble.**

c) 1 y 2, las dos dobles.

a) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$
b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)^2$
c) $(x - 1)^2(x - 2)^2$

Nota: En los tres casos hay infinitas soluciones. Basta multiplicar por una constante.

10. Halla el polinomio de segundo grado sabiendo que tiene por raíces $x = 1$ y $x = -6$ y que $P(0) = -12$

Sea $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ siendo x_1 y x_2 sus raíces.
Si $x_1 = 1$ y $x_2 = -6 \Rightarrow P(x) = a(x-1)(x+6)$
Por $P(0) = -12 \Rightarrow P(0) = a(-1)\cdot(6) = -12 \Rightarrow a = 2$.
Luego, $P(x) = 2(x-1)(x+6) = 2x^2 + 10x - 12$

11. Factoriza las siguientes expresiones polinómicas:
a) $3x^2 + 14x - 5$ **b)** $4x^5 + 2x^4 - 2x^3$
c) $x^3 + 5x^2 + 8x$

a) Resolviendo $3x^2 + 14x - 5 = 0$ se tiene: $x = 1/3$ y $x = -5$
Por tanto, $3x^2 + 14x - 5 = 3(x - 1/3)(x + 5)$
b) Sacando factor común $2x^3$, se obtiene:
$4x^5 + 2x^4 - 2x^3 = 2x^3(2x^2 + x - 1)$
Resolviendo $2x^2 + x - 1 = 0$, se tiene $x = 1/2$, $x = -1$
Por tanto, $2x^2 + x - 1 = 2(x - 1/2)(x + 1)$
Luego,
$4x^5 + 2x^4 - 2x^3 = 2x^3(2x^2 + x - 1) = 2x^3\cdot 2(x - 1/2)(x + 1) = 4x^3(x - 1/2)(x + 1)$
c) Sacando factor común x, se obtiene:
$x^3 + 5x^2 + 8x = x(x^2 + 5x + 8)$
Resolviendo $x^2 + 5x + 8 = 0$, se tiene:
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{-25 - 4\cdot 1\cdot 8}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{2}$$
Como esta ecuación no tiene solución, el polinomio $x^2 + 5x + 8$ no se puede descomponer en factores simples.
En consecuencia, $x^3 + 5x^2 + 8x = x(x^2 + 5x + 8)$

12. Factoriza los siguientes polinomios:
a) $P(x) = -5x^2 - x$
b) $P(x) = 4x^4 + 10x^2$
c) $P(x) = 10x^3 - 250x$
d) $P(x) = 8x^4 + 80x^3 + 200x^2$

a) $P(x) = -5x^2 - x = -x(5x + 1)$
b) $P(x) = 4x^4 + 10x^2 = 2x^2(2x^2 + 5)$
c) $P(x) = 10x^3 - 250x = 10x(x^2 - 25) = 10x(x + 5)(x - 5)$
d) $P(x) = 8x^4 + 80x^3 + 200x^2 = 8x^2(x^2 + 10x + 25) = 8x^2(x + 5)^2$

13. Halla el valor de b y factoriza $P(x) = x^3 + bx^2 - 12x$ sabiendo que $x = -2$ es una de sus raíces.

Como $P(-2) = 16 + 4b \Rightarrow b = -4$.
Por tanto, $P(x) = x^3 - 4x^2 - 12x = x(x+2)(x-6)$

Tipo III. Fracciones algebraicas

14. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:
a) $\dfrac{21x^2}{7x - 14x^2}$ **b)** $\dfrac{4 - x}{3x - 12}$
c) $\dfrac{3x^2 - 4x}{x^3}$ **d)** $\dfrac{4x - 8}{2x}$
e) $\dfrac{3x^2 - 12}{x + 2}$ **f)** $\dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 1}$

a) $\dfrac{21x^2}{7x - 14x^2} = \dfrac{3\cdot 7\cdot x^2}{7x(1 - 2x)} = \dfrac{3x}{1 - 2x}$
b) $\dfrac{4 - x}{3x - 12} = \dfrac{4 - x}{3(x - 4)} = \dfrac{-(x-4)}{3(x-4)} = -\dfrac{1}{3}$
c) $\dfrac{3x^2 - 4x}{x^3} = \dfrac{x(3x^2 - 4)}{x^3} = \dfrac{3x^2 - 4}{x^2}$
d) $\dfrac{4x - 8}{2x} = \dfrac{4(x-2)}{2x} = \dfrac{2(x-2)}{x}$
e) $\dfrac{3x^2 - 12}{x + 2} = \dfrac{3(x^2 - 4)}{x + 2} = \dfrac{3(x+2)(x-2)}{x + 2} = 3(x-2)$
f) $\dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$

15. Simplifica:
a) $\dfrac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2}$ **b)** $\dfrac{4x^2 - 40x + 100}{4x^2 - 100}$
c) $\dfrac{3x^3 - 6x^2}{3x^4 + 24x^3 - 60x^2}$

a) $\dfrac{x^2 + 6x - 7}{2x - 2} = \dfrac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \dfrac{x+7}{2}$
b) $\dfrac{4x^2 - 40x + 100}{4x^2 - 100} =$
$= \dfrac{4(x^2 - 10x + 25)}{4(x^2 - 50)} = \dfrac{4(x-5)^2}{4(x+5)(x-5)} = \dfrac{x-5}{x+5}$
c) $\dfrac{3x^3 - 6x^2}{3x^4 + 24x^3 - 60x^2} =$
$= \dfrac{3x^2(x-2)}{3x^2(x^2 + 8x - 20)} = \dfrac{3x^2(x-2)}{3x^2(x-2)(x+10)} = \dfrac{1}{x+10}$

16. Halla, simplificando el resultado:
a) $x - 1 + \dfrac{2}{x+1}$ **b)** $2x - \dfrac{x-1}{x^2}$
c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} - \dfrac{8}{x^4}$ **d)** $\dfrac{3x-2}{x} - \dfrac{3x-3}{x+2}$
e) $\dfrac{5}{x^2} + \dfrac{3x}{x^2 + x} + \dfrac{3}{x+1}$ **f)** $\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2 + 1$
g) $\dfrac{x+1}{x+5} + \dfrac{8x}{x^2 - 25}$ **h)** $\dfrac{x}{3x+9} + \dfrac{x-2}{3x-9} - \dfrac{2x^2}{3x^2 - 27}$

a) $\dfrac{x^2+1}{x+1}$ b) $\dfrac{2x^3 - x + 1}{x^2}$
c) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4}$ d) $\dfrac{7x - 4}{x(x+2)}$
e) $\dfrac{5}{x^2}$ f) $\dfrac{2x^2 + 2}{(x+1)^2}$
g) $\dfrac{x-1}{x-5}$ h) $\dfrac{-2}{3(x-3)}$

17. Calcula el resultado, factorizando si conviene:
a) $\dfrac{2x-1}{3x-3} - \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{3x^2 - 6x + 3}$
b) $\dfrac{3x^2 - 12x + 12}{x^2 - 5x + 6} : \dfrac{6x^3 - 54x}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

a) Factorizamos los denominadores:
$3x - 3 = 3(x-1)$; $3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$
Por tanto, el m.c.m. de los denominadores es $3(x-1)^2$
Así:
$\dfrac{2x-1}{3x-3} - \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{3x^2 - 6x + 3} = \dfrac{2x-1}{3(x-1)} - \dfrac{2x^2 - 6x + 4}{3(x-1)^2} =$

$= \dfrac{(2x-1)(x-1)-(2x^2-6x+4)}{3(x-1)^2} =$

$= \dfrac{2x^2-3x+1-2x^2+6x-4}{3(x-1)^2} = \dfrac{3x-3}{3(x-1)^2} =$

$= \dfrac{3(x-1)}{3(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1}$

b) $\dfrac{3x^2-12x+12}{x^2-5x+6} : \dfrac{6x^3-54x}{x^3-6x^2+9x} =$

$= \dfrac{3(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} : \dfrac{6x(x+3)(x-3)}{x(x-3)^2} =$

$= \dfrac{3(x-2)^2 \cdot x(x-3)^2}{(x-2)(x-3)\cdot 6x(x+3)(x-3)} = \dfrac{3(x-2)}{6(x+3)} = \dfrac{x-2}{2(x+3)}$

18. Halla, simplificando el resultado:

a) $(2x-1) : \dfrac{3x}{x+1}$ **b)** $\dfrac{\frac{x+3}{3x-2}}{x+1}$

c) $\dfrac{x^2-1}{x} : \dfrac{x+1}{x+2}$ **d)** $\dfrac{x+3}{x-2} \cdot \dfrac{x^2-4x+4}{x^2-9}$

e) $\dfrac{3x^4-15x^3+18x^2}{x^2-8x+15} : \dfrac{x^2+15x}{x^2-25}$

f) $\dfrac{5x^2-4}{x^2-4} + \dfrac{x-2}{5x+15} \cdot \dfrac{5x^2+20x+15}{x+2}$

a) $\dfrac{2x^2+x-1}{3x}$ b) $\dfrac{x^2+4x+3}{3x-2}$

c) $\dfrac{x^2+x-2}{x}$ d) $\dfrac{x-2}{x-3}$

e) $x^2 - 2x$ f) $\dfrac{x^2}{x-2}$

19. Transforma, sin hacer la división, la expresión $\dfrac{D(x)}{d(x)}$ en su equivalente de la forma $C(x)+\dfrac{r(x)}{d(x)}$, en los casos:

a) $\dfrac{2x^2-3x+5}{x}$ **b)** $\dfrac{x^2+3x-5}{x^2}$

c) $\dfrac{x^2-3x+5}{x-3}$ **d)** $\dfrac{x^2}{x-1}$

a) $\dfrac{2x^2-3x+5}{x} = 2x-3+\dfrac{5}{x}$

b) $\dfrac{x^2+3x-5}{x^2} = 1+\dfrac{3x-5}{x^2}$

c) $\dfrac{x^2-3x+5}{x-3} = \dfrac{x(x-3)+5}{x-3} = x+\dfrac{5}{x-3}$

d) $\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{x^2-1+1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)+1}{x-1} = x+1+\dfrac{1}{x-1}$

20. Descompón en fracciones simples:

a) $\dfrac{1}{x^2-4}$ **b)** $\dfrac{2x-1}{x^2+3x-4}$

c) $\dfrac{3x+2}{x^2+3x}$

a) $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} = \dfrac{B}{x+2} = \dfrac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)}$

Luego:
$1 = A(x+2)+B(x-2)$
si $x=2$: $1 = 4A \Rightarrow A = 1/4$
si $x=-2$: $1 = -4B \Rightarrow B = -1/4$
Con esto: $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{1/4}{x-2} - \dfrac{1/4}{x+2}$

b) $\dfrac{2x-1}{x^2+3x-4} = \dfrac{1/5}{x-1} + \dfrac{9/5}{x+4}$

c) $\dfrac{3x+2}{x^2+3x} = \dfrac{2/3}{x} + \dfrac{7/3}{x+3}$

Tipo IV. Operaciones con otras expresiones algebraicas

21. Sea $P(x)=x^2-1$ y $Q(x)=-x^2-x+2$, halla:

a) $P(x) - 2Q(x)$ **b)** $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

c) $\dfrac{Q(x)-2}{P(x)}$

a) $3x^2+2x-5$ b) $-\dfrac{x+1}{x+2}$

c) $\dfrac{x}{1-x}$

22. Para los mismos $P(x)$ y $Q(x)$ halla:

a) $(P(x)+P(x))^2$
b) $(P(x))^2+x^2 \cdot Q(x)$
c) $(P(x)-Q(x))(P(x)+Q(x))$

a) $(x+1)^2$
b) $1-x^3$
c) $-2x^3+x^2+4x-3$

23. Halla:

a) $(2x-\sqrt{x})^2$ **b)** $2(4x-3\sqrt{x})-(\sqrt{x}-3)^2$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1-\sqrt{x}}{x}-\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$

a) $4x^2-4x\sqrt{x}+x$ b) $7x - 9$

c) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2}$

24. Dadas las expresiones $E(x)=\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+1}$ y $F(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-1}$ halla:

a) $E(1)$, $F(1)$, $E(4)$ y $F(4)$
b) $E(x) \cdot F(x)$

a) $E(1) = 0$, $F(1)$ no definido, $E(4) = 2/5$; $F(4) = 2$

b) $E(x) \cdot F(x) = \dfrac{x}{x+1}$

25. Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$ **b)** $\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$

a) $\dfrac{(x+1)\sqrt{x}}{x}$ b) $\dfrac{-x-1+2\sqrt{x}}{x-1}$

c) $x+\sqrt{x(x-1)}$

Tipo V. Aplicaciones

26. Expresa algebraicamente:
a) Cuatro veces x menos su décima parte.
b) El producto de dos números consecutivos vale 462.
c) El precio de una entrada de cine es x más el 6 por 100 de IVA aplicado sobre x.
d) El cuadrado de la diferencia entre x e y, más el doble del cuadrado de x.

a) $4x-\dfrac{x}{10}$ b) $x \cdot (x+1) = 462$

c) $P=x+\dfrac{6}{100}x$ d) $(x-y)^2 + 2x^2$

27. La altura de un cohete viene dada por la expresión $h(t)=50t-5t^2$, donde t viene dado en segundos y $h(t)$ en metros.
a) ¿Qué altura alcanza el cohete al cabo de 1, 2 y 5 segundos?
b) ¿Y al cabo de 10 segundos? ¿Cómo interpretas este último resultado?

a) $h(1)=50-5=45$ m; $h(2)=100-20=80$ m;
$h(5)=250-125=125$ m.
b) $h(10)=0$. El cohete ha caído.

28. El coste total, en euros, de la producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la expresión $C(x)=100\sqrt{x}+1000)^2$. Halla:
a) El coste de producir 16, 100, y 400 unidades. ¿A cuánto sale la unidad en cada caso?
b) Determina la expresión que da el coste por unidad cuando se fabrican x unidades.

a) $C(16)=100\sqrt{16}+1000=1400$ €. Cada unidad sale a 1 400/16 = 87,5 €
$C(100)=100\sqrt{100}+1000=2000$ €. Cada unidad sale a 2 000/100 = 20 €
$C(400)=100\sqrt{400}+1000=3000$ €. Cada unidad sale a 3 000/400 = 7,5 €
b) El coste unitario es igual al coste total entre el número x de unidades fabricadas. Esto es:

$$c(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{100\sqrt{x}+1000}{x}$$

29. Halla la expresión que da la superficie de un triángulo isósceles de perímetro 8 cm en función de la base x. Calcula el valor de esa área cuando $x=3$.

Sea el triángulo de la figura, donde cada uno de los lados iguales vale y.

Como su perímetro vale 8 $\Rightarrow$ $2y + x = 8 \Rightarrow y=\dfrac{8-x}{2}$

Por Pitágoras: $y^2=h^2+\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow h=\sqrt{y^2-\dfrac{x^2}{4}}$

Sustituyendo el valor de $y=\dfrac{8-x}{2} \Rightarrow$

$h=\sqrt{\dfrac{64-16x+x^2}{4}-\dfrac{x^2}{4}}=\sqrt{16-4x}$

El área del triángulo es $A=\dfrac{x \cdot h}{2}$.

Sustituyendo h por su valor,

$A(x)=\dfrac{x\sqrt{16-4x}}{2}=\sqrt{4x^2-x^3}$

Para $x=3$, el área vale $A(3)=\sqrt{4\cdot 9-27}=3$ cm^2.

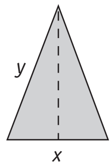

Fig. 3.1.

30. Una piscina rectangular está rodeada por un pasillo enlosado de 1,5 m de ancho. Si la piscina es 10 m más larga que ancha, halla:
a) La expresión que da el área del rectángulo que delimita la piscina.
b) La expresión que da el área del pasillo enlosado.

La situación es como la que se muestra en la figura.

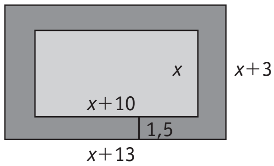

Fig. 3.2.

a) $A(x)=(x+13)(x+3)=x^2+16x+39$
b) El área del pasillo es la diferencia entre el rectángulo de fuera menos el rectángulo de la piscina.
$P(x)=(x+13)(x+3)-(x+10)x=$
$=x^2+16x+39-x^2-10x=6x+39$

31. Expresa (en función del primero de ellos) el producto de tres números positivos cuya suma es 60 y tal que el segundo sea doble del primero.

Sean x, y, z los números.
Se sabe que $y=2x$; y que $x+y+z=60 \Rightarrow 3x+z=60 \Rightarrow$
$z=60-3x$
El producto de los tres números es:
$P=xyz=x\cdot 2x\cdot(60-3x)=-6x^3+120x^2$

32. En la pared lateral de una buhardilla se quiere poner un panel rectangular como el que se muestra en la Fig. 3.3. Determina la superficie de dicho panel en función del lado x de la base.

La superficie del panel es $S=x(y+1)$. Ver figura.

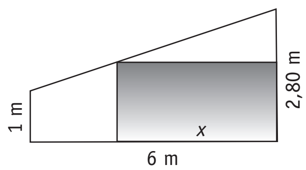

Fig. 3.3.

Por Tales: $\frac{6-x}{y}=\frac{6}{1{,}80} \Rightarrow y=\frac{1{,}80(6-x)}{6}$

Por tanto: $S(x)=x\cdot\left(1+\frac{1{,}80(6-x)}{6}\right)=2{,}8x-0{,}3x^2$

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 10 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Expresa algebraicamente:
a) La mitad de x más el cuadrado de y.
b) La velocidad es el espacio partido por el tiempo.
c) La mitad de la suma de B y b, por h. (Área de un trapecio.)

a) $\frac{x}{2}+y^2$;

b) $v=\frac{e}{t}$;

c) $\frac{B+b}{2}\cdot h$

2. Halla: $(2x-3)^2-(2x+4)\cdot(2x-4)$

$-12x+18$

3. Simplifica $\frac{2x^2+6x}{2x}$

$x+3$

4. Halla $\left(\frac{2}{3}x+1\right)\cdot\left(-2x+\frac{1}{2}\right)$

$-\frac{4}{3}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{2}$

5. Halla el resto y el cociente de la división $(x^3-2x+1):(x-3)$

$C(x)=x^2+3x+7$; $r=22$.

6. Calcula el valor numérico de $P(x)=2x^3-9x+2$ para $x=-1$ y $x=2$. ¿Puedes dar un factor de $P(x)$ de la forma $x-a$?

$P(-1)=9$; $P(2)=2$. No, no tiene raíces enteras.

7. Sin resolver la ecuación de segundo grado asociada al polinomio $Q(x)=x^2+7x$, halla sus raíces.

0 y -7

8. La expresión $C(x)=\frac{10x+100\sqrt{x}+1000}{x}$ da el coste (en euros) por unidad fabricada de un determinado producto, cuando se fabrican x unidades de él. ¿A cuánto sale la unidad cuando se fabrican 10 000 unidades?

11,1 €

9. Halla la expresión que da la superficie de un triángulo equilátero en función del lado x.

$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

10. Halla un polinomio de segundo grado que tenga por raíces $x=-1$ y $x=-2$.

x^2+3x+2

Actividades

1. De la ecuación $x^2+bx+c=0$ se sabe que la suma de sus raíces es 2 y su producto −3. Encuentra dichas raíces y los coeficientes b y c.

Planteamos las ecuaciones: $\begin{cases} -\dfrac{b}{1}=2 \\ \dfrac{c}{1}=-3 \end{cases} \Rightarrow b=-2,\ c=-3.$

Así que la ecuación propuesta es $x^2-2x-3=0$, cuyas soluciones son 3 y −1.

2. Resuelve la ecuación $\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-3}=2$

$\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2-3}=2 \Rightarrow$
$\sqrt{2x^2+1}=\sqrt{x^2-3}+2 \Rightarrow 2x^2+1=x^2-3+4\sqrt{x^2-3}$
$\Rightarrow x^2=4\sqrt{x^2-3} \Rightarrow x^4=16(x^2-3) \Rightarrow x^4-16x^2+48=0$, ecuación bicuadrada que se resuelve haciendo
$x^2=t,\ t^2-16t+48=0 \Rightarrow t=4$ y $t=12 \Rightarrow$
$x=\pm 2$ y $x=\pm\sqrt{12}=\pm 2\sqrt{3}$

3. Resuelve las ecuaciones:
a) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+1}=0$ b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{1-x}=3x$
c) $\dfrac{x}{x+1}+2=\dfrac{3x+1}{x}$

a) $\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+1}=0$ se verifica si el numerador es cero:
$x^2-3x-4=0$, que resuelta da por soluciones $x=-1$ y $x=4$, ambas aceptables.
b) Quitamos denominadores en la ecuación, quedando:
$x(1-x)+x+1=3(x+1)(1-x) \Rightarrow$
$2x-x^2+1=-3x^2+3 \Rightarrow 2x^2+2x-2=0$, ecuación que nos aporta las soluciones $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
c) Operando: $\dfrac{x}{x+1}+2=\dfrac{3x+1}{x+1}=\dfrac{3x+2}{x+1}=\dfrac{3x+1}{x} \Rightarrow$
$-3x^2+2x=3x^2+4x+1 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-1/2.$

4. Discute, sin llegar a resolver, la compatibilidad de los sistemas:
a) $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ -2x+y=5 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases}$
c) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -4x+8y=-12 \end{cases}$

Transformamos cada uno de los sistemas por el método de reducción:

a) $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ -2x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{2E2+E1}{} \begin{cases} 4x-2y=-1 \\ 0=3 \end{cases}$
El sistema es incompatible.

b) $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{E2+E1}{} \begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x=3 \end{cases}$
El sistema es compatible determinado.

c) $\begin{cases} x-2y=3 \\ -4x+8y=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \underset{E2+4E1}{} \begin{cases} x-2y=3 \\ 0=0 \end{cases}$
El sistema es compatible indeterminado.

5. Sea el sistema $\begin{cases} 4x+by=5 \\ -2x+y=4 \end{cases}$, calcula los valores que debe tomar b para que el sistema sea:
a) Compatible.
b) Incompatible.

a) Para que el sistema sea compatible determinado los coeficientes de las incógnitas no han de ser proporcionales, luego: $\dfrac{4}{-2}\neq\dfrac{b}{1} \Rightarrow b\neq -2.$
b) El sistema será compatible indeterminado si $\dfrac{4}{-2}=\dfrac{b}{1}=\dfrac{5}{4}$, lo que nunca podrá cumplirse.

6. Halla la solución de $\begin{cases} y^2+x^2=160 \\ x-y=8 \end{cases}$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera: $y^2+(y+8)^2=160 \Rightarrow 2y^2+16y-96=0 \Rightarrow y=-12$ e $y=4$, que dan para x los valores $x=-4$ y 12 respectivamente.

Problemas propuestos

Tipo I. Ecuación de primer grado y problemas relacionados

1. Expresa mediante una ecuación las siguientes relaciones:
a) La suma de un número par, su anterior y su posterior vale 60
b) La suma de tres números impares consecutivos vale 213.
c) El cuadrado de la suma de dos números es igual al doble de su suma.

a) $2n+2n-2+2n+2=60 \Leftrightarrow 6n=60$
b) $2n-1+2n+1+2n+3=213 \Leftrightarrow 6n+3=213$
c) $(a+b)^2=2(a+b)$

2. Escribe una ecuación lineal que no tenga solución. Y otra que posea infinitas.

Sin solución: $x+3x-1=4x+2$
Indeterminada: $-2x+5+x=6-x-1$ (es una identidad)

3. Resuelve las ecuaciones :
a) $\dfrac{2}{x+1}=-\dfrac{1}{x+4}$
b) $\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{2(x+2)}{3}=\dfrac{3x+1}{6}$

a) $\dfrac{2}{x+1}=-\dfrac{1}{x+4} \Rightarrow 2(x+4)=-x-1 \Rightarrow x=-3$

b) $\frac{x-1}{4}-\frac{2(x+2)}{3}=\frac{3x+1}{6}$ quitamos denominadores como en a) quedando: $3x-3-8x-16=6x+12 \Rightarrow x=-21/11$

4. Halla la solución:

a) $|x+3|=\frac{x}{3}+3$ **b)** $|x|=\frac{1-x}{2}$

c) $\left|\frac{x+2}{5}\right|=x-2$

a) Como $|x+3|=|-x-3|$ la igualdad es cierta si:

$x+3=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow x=0$ o

$-x-3=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow x=-\frac{18}{4}=-\frac{9}{2}$

b) Análogamente al caso anterior, de $|x|=\frac{1-x}{2}$ deducimos dos ecuaciones :

$x=\frac{1-x}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$-x=\frac{1-x}{2} \Rightarrow x=-1$

c) Para este caso:

$\frac{x+2}{5}=x-2 \Rightarrow x=3$

$-\frac{x+2}{5}=x-2 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

5. Tres operarios trabajan en total 96 horas semanales en una cadena de producción. Si el tiempo dedicado por uno de ellos a este fin son los 3/5 del tiempo empleado por otro y éste los 5/8 del dedicado por el tercero, ¿cuántas horas semanales permanece cada trabajador en la cadena?

Llamemos x las horas semanales de trabajo del tercer operario, entonces el segundo dedica $\frac{5}{8}x$ y el primero $\frac{3}{5}\frac{5}{8}x=\frac{3}{8}x$; así que, $\frac{3}{8}x+\frac{5}{8}x+x=96 \Rightarrow 2x=96 \Rightarrow x=48$ horas. El segundo operario trabaja 30 h y el primero 18 h.

6. Halla tres múltiplos consecutivos de 3, cuya suma sea 54.

Si el primer múltiplo de 3 es $3x$, el siguiente será $3x+3$ y el siguiente $3x+6$.
Imponiendo la condición de la suma:
$3x+3x+3+3x+6=54 \quad 9x=54-9=45 \quad x=5$. Luego los múltiplos consecutivos son: 15, 18 y 21.

7. Se mezclan 50 litros de aceite de girasol de 0,99 €/l con aceite de 0,78 €/l, obteniéndose una mezcla de 0,9 €/l. ¿Cuántos litros se han empleado del aceite más barato?

Llamemos x los litros empleados del aceite de 0,78 €. El valor monetario de los $50+x$ litros de mezcla es: $(50+x)\cdot 0{,}9$ €, que coincidirá con el valor, en euros, de los líquidos que la componen: $x\cdot 0{,}78+50\cdot 0{,}99$ es decir,
$(50+x)\cdot 0{,}9=x\cdot 0{,}78+50\cdot 0{,}99 \Rightarrow 750=20x \Rightarrow x=37{,}5$ litros

8. Un automóvil parte de Sevilla a una velocidad constante de 90 km/h. Veinte minutos después parte otro coche en su búsqueda, alcanzándole a las dos horas. ¿A qué velocidad circuló el segundo coche?

El primer coche que salió de Sevilla, ha circulado durante 2 horas y 20 min, o sea, $2+\frac{1}{3}$ h $=\frac{7}{3}$ h y ha recorrido $90\cdot\frac{7}{3}=$ 210 kilómetros.
El segundo coche ha recorrido esos mismos kilómetros en 2 horas, luego su velocidad ha sido: $\frac{210}{2}=105$ km/h.

Tipo II. La ecuación de segundo grado y problemas afines

9. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:
a) $3x^2+x=0$ **b)** $3(x+1)^2=27$
c) $4x^2-4x-35=0$ **d)** $-2(x-5)^2-8=0$
e) $(1-2x)^2+3x=2(x+2)^2+2$

a) Si sacamos factor común: $x(3x+1)=0 \Rightarrow x=0$ o $3x+1=0$, que nos da los valores solución $x=0$ y $x=-\frac{1}{3}$.

b) Pongamos $(x+1)^2=\frac{27}{3}=9 \Rightarrow x+1=\pm\sqrt{9}=\pm 3$ y nos resultan las soluciones, para $+3$: $x+1=3 \Rightarrow x=2$; y para -3: $x+1=-3 \Rightarrow x=-4$

c) Aplicamos la fórmula general:
$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 4\cdot 35}}{2\cdot 4}=\frac{4\pm 24}{8}$, es decir,
$x=7$ y $x=-5/2$.

d) Como en el caso b), si despejamos $(x-5)^2$ nos queda: $(x-5)^2=\frac{8}{-2}=-4$ lo que es imposible pues el primer miembro siempre es positivo. Esta ecuación carece de solución real.

e) $(1-2x)^2+3x=2(x+2)^2+2 \Leftrightarrow 2x^2-9x-9=0 \Rightarrow$
$x=\frac{9\pm\sqrt{153}}{4}$

10. ¿Cuánto tiene que valer c en la ecuación $3x^2+5x+c=0$ para que posea dos, una o ninguna solución?

El discriminante de la ecuación es: $\Delta=25-12c \Rightarrow$

$$\begin{cases} c<\frac{25}{12} & \text{tiene 2 soluciones} \\ c=\frac{25}{12} & \text{solución doble} \\ c>\frac{25}{12} & \text{solución imaginaria} \end{cases}$$

11. En $x^2+bx-2=0$, ¿qué tipo de soluciones te vas a encontrar para cualquier valor de b?

El discriminante $\Delta=b^2+8>0 \Rightarrow 2$ soluciones reales

12. ¿Qué valor o valores de c hacen que la ecuación $5x^2-2x+c=0$ tenga solución doble?

Para que tenga solución doble: $\Delta=4-20c=0 \Rightarrow c=1/5$

13. Dos operarios realizan una obra en 12 días, trabajando conjuntamente. Uno de ellos emplea 10 días más que el otro si trabaja sólo. ¿Cuantos días necesita cada obrero para completar la obra en solitario?

Trabajando solo un operario tarda x días y el más lento $x+10$. En un día, el primero hará $\frac{1}{x}$ de su trabajo y el segundo $\frac{1}{x+10}$; si trabajan conjuntamente hacen $\frac{1}{12}$ de obra por día, luego: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=\frac{1}{12}\Rightarrow\frac{x+10+x}{x(x+10)}=\frac{1}{12}\Rightarrow 12(2x+10)=$
$\Rightarrow =x(x+10)\Rightarrow 24x+120=x^2+10\Rightarrow x^2-14x-120=0$
ecuación que resuelta da por soluciones 20 y -6 días, siendo válida únicamente la positiva. Así, cada trabajador emplea 20 y 30 días en hacer la obra.

14. La suma de los cuadrados de la edad actual de un muchacho y de la que tendrá dentro de dos años es de 580. ¿Cuántos años tiene el chico?

Si tiene actualmente x años, dentro de dos tendrá $x+2$ años.
Las condiciones del problema imponen que $x^2+(x+2)^2=580$, que desarrollando, reduciendo términos semejantes y dividiendo por 2 nos da la ecuación:
$x^2+2x-288=0$, con soluciones $x=-18$ y $x=16$. La negativa no es válida.

15. Dos fuentes llenan un depósito en 6 h y una sola de ellas lo llenaría empleando 12 h más que la otra. ¿Cuánto tiempo tardará cada una en colmar el depósito?

Observación: Este problema es similar al resuelto n.º 2, pero dará lugar a una ecuación de segundo grado.
Sean x las horas que tarda en llenar el depósito la fuente con mayor caudal. En una hora, cada fuente rellena $1/x$ y $1/(x+12)$ del depósito, respectivamente, y las dos conjuntamente, 1/6 del mismo; por tanto:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+12}=\frac{1}{6}$$

Al quitar denominadores nos resulta:
$6(x+12)+6x=x(x+12)\Rightarrow 6x+72+6x=x^2+12x\Rightarrow$
$\Rightarrow x^2=72\Rightarrow x=\pm\sqrt{72}=\pm 6\sqrt{2}$ cuya solución positiva es la única admisible, por lo que las fuentes tardarán en llenar el depósito $6\sqrt{2}$ y $6\sqrt{2}+12$ horas.

Tipo III. Ecuaciones reducibles a cuadráticas, racionales y polinómicas.

16. Resuelve las ecuaciones:
a) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}$
b) $x-\sqrt{x}=6$
c) $2x-\sqrt{x}=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$
d) $\sqrt{21x-6}=3x$

a) $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}\Rightarrow x^2-4=12\Rightarrow x^2=16\Rightarrow x=\pm 4$
b) $x-\sqrt{x}=6\Rightarrow x-6=\sqrt{x}\Rightarrow (x-6)^2=(\sqrt{x})^2\Rightarrow$
$x^2-13x+36=0$ que la solución positiva, única válida es $x=9$
c) $2x-\sqrt{x}=\dfrac{x}{\sqrt{x}}$, vamos a quitar denominadores y pasamos al primer miembro todos los términos: $2x\sqrt{x}-x=x\Rightarrow$
$2x(\sqrt{x}-1)=0\Rightarrow x=0$ o $\sqrt{x}=1\Rightarrow x=1$ es la solución válida.
d) Elevando al cuadrado se obtiene:
$21x-6=(3x)^2\Rightarrow 21x-6=9x^2$
Simplificando: $3x^2-7x+2=0$.
Las soluciones son: $x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-4\cdot3\cdot2}}{6}=\dfrac{7\pm5}{6}$,
es decir: $x_1=2$ y $x_2=\frac{1}{3}$.
Ambas soluciones son válidas, según puedes comprobar

17. Halla la solución y comprueba los resultados:
a) $3x+\sqrt{3x-1}=1$
b) $2x-3\sqrt{x-3}=x+3$
c) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{1-x}$

a) Dejamos la raíz en el primer miembro y elevamos al cuadrado:
$3x-1=(1-3x)^2$.
Desarrollando y agrupando:
$3x-1=1+9x^2-6x\Rightarrow 9x^2-9x+2=0$
que tiene por soluciones $x_1=\frac{2}{3}$ y $x_2=\frac{1}{3}$. Sólo es admisible 1/3 como solución.
b) En $2x-3\sqrt{x-3}=x+3$ aislamos la raíz en el segundo miembro: $x-3=3\sqrt{x-3}\Rightarrow (x-3)^2=9(x-3)\Rightarrow x^2-15x+36=0$ cuyas soluciones 3 y 12 son ambas válidas.
c) Elevamos los dos miembros al cuadrado:
$2x-1=3x-2+1-x+2\sqrt{(3x-2)(1-x)}\Rightarrow$
$0=2\sqrt{(3x-2)(1-x)}\Rightarrow 0=4(3x-2)(1-x)$ que nos proporciona $x=1$ y $x=2/3$ (ésta no es válida) como soluciones.

18. Calcula las soluciones de:
a) $x^4-9x^2=0$
b) $x^4-8x^2+16=0$
c) $2x^4+x^2-3=0$
d) $x^4-3x^2+2=0$

a) $x^4-9x^2=0\Rightarrow x^2(x^2-9)=0\Rightarrow x^2(x+3)(x-3)=0$ que da las soluciones $x=0$, $x=3$ y $x=-3$
b) $x^4-8x^2+16=0$ es una ecuación bicuadrada que haciendo $x^2=t$, nos queda: $t^2-8t+16=(t-4)^2=0$ dando por raíz $t=4$ y por tanto, $x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$
c) $2x^4+x^2-3=0$ también es bicuadrada por lo que con $x^2=t$ queda $2t^2+t-3=0$ que proporciona $t=1$ única solución positiva y $x=\pm 1$.
d) $x^2=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\begin{cases}2\\1\end{cases}\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$ y $x=\pm 1$

19. Halla las raíces de las ecuaciones:
a) $(x^2-1)(x^2+3x)=0$
b) $x^4+2x^3-x^2+4x-6=0$
c) $2x^4-3x^3+x=0$

a) Si descomponemos en factores los términos de la ecuación $(x^2-1)(x^2+3x)=0\Rightarrow (x+1)(x-1)x(x+3)=0\Rightarrow x=1$, $x=-1$, $x=0$ y $x=-3$ son las soluciones.
b) Tanteamos las raíces de $x^4+2x^3-x^2+4x-6=0$ dividiendo por Ruffini, que nos da:

	1	2	−1	4	−6
1		1	3	2	6
	1	3	2	6	0
−3		−3	0	−6	
	1	0	2	0	

soluciones reales son $x = 1$ y $x = -3$, quedando el polinomio $x^2 + 2 = 0$ que tiene raíces imaginarias.

c) En $2x^4 - 3x^3 + x = 0$ sacamos factor común x: $x(2x^3 - 3x + 1) = 0$; el polinomio del paréntesis nos da las raíces $x = 1$ y $x = -1/2$, que junto a $x = 0$ del factor común tenemos las raíces de la ecuación propuesta.

	2	−3	0	1
1		2	−1	−1
	2	−1	−1	0
1		2	1	
	2	1	0	
−1/2		−1		
	2	0		

20. Resuelve:

a) $\dfrac{1-4x}{2x^2-1}=0$ **b)** $\dfrac{5}{2x^2-1}=0$

c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=0$ **d)** $\dfrac{-2}{3x-1}=\dfrac{4}{1-x}$

e) $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+4}{x+2}$ **f)** $3x^2+1=\dfrac{8}{x^2+1}$

a) $\dfrac{1-4x}{2x^2-1}=0$, el numerador debe anularse $\Rightarrow 1 - 4x = 0 \Rightarrow$ $x = 1/4$

b) $\dfrac{5}{2x^2-1}=0$, como $5 \neq 0$ esta ecuación nunca puede anularse.

c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}=0$ equivale a que el numerador se anule: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 1$

d) Para quitar denominadores, multiplicamos en cruz: $\dfrac{-2}{3x-1}=\dfrac{4}{1-x} \Rightarrow -2 + 2x = 12x - 4 \Rightarrow 10x = 2 \Rightarrow x = 1/5$

e) Multiplicamos en cruz: $\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{x+4}{x+2} \Rightarrow x^2 - 4 = x^2 + 5x + 4$ $\Rightarrow 5x = -8 \Rightarrow x = -8/5$

f) Quitamos el denominador: $(3x^2+1)(x^2+1)=8 \Rightarrow 3x^4 + 4x^2 + 1 = 8 \Rightarrow 3x^4 + 4x^2 - 7 = 0$; esta ecuación bicuadrada que con el cambio habitual $x^2 = t$ nos da como soluciones válidas en $x = \pm 1$.

Tipo IV. Ecuaciones de dos incógnitas y sistemas lineales.

21. Resuelve por sustitución:

a) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-y=1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=-y+1 \\ \dfrac{x-y}{2}=1-x \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ 6x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=2 \\ y=6x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3(6x-1)=2 \\ y=6x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -16x=2-3 \\ y=6x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{16} \\ y=6\dfrac{1}{16}-1=-\dfrac{5}{8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}=-y+1 \\ \dfrac{x-y}{2}=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2-2y \\ x-y=2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3y \\ 3x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2-3y \\ 3(2-3y)-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3y \\ 4-10y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-3\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{2}{5} \end{cases}$

22. Resuelve por reducción:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ x-\dfrac{y}{3}=-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{3}=0 \\ \dfrac{x+y-2}{2}=1 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ x-\dfrac{y}{3}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$E2+E1 \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \\ x=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=9-2=7 \\ x=\dfrac{4}{3} \end{cases}$

b) Si en el sistema $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y-1}{3}=0 \\ \dfrac{x+y-2}{2}=1 \end{cases}$ quitamos denominadores

queda: $\begin{cases} 3x+2y=-1 \\ x+y=5 \end{cases}$ y

$E1-3E2 \begin{cases} x=-1-10 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ -11+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=16 \end{cases}$

23. Halla el valor de los parámetros a y b en $\begin{cases} \dfrac{5}{2}x-ay=-3 \\ -\dfrac{1}{3}x+ay=b \end{cases}$, para que $x = 2$, $y = 3$ sea solución del sistema.

Sustituyamos en el sistema las soluciones:

$\begin{cases} 5-3a=-3 \\ -\dfrac{2}{3}+3a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{8}{3} \\ b=8-\dfrac{2}{3}=\dfrac{22}{8} \end{cases}$

24. Añade a la ecuación $6x - 2y = -3$ otra ecuación, de forma que resulte un sistema:
a) Determinado. b) Indeterminado. c) Incompatible.

a) Para que el sistema sea determinado añadimos una ecuación que tenga coeficientes no proporcionales a los de la dada, por ejemplo, $x + y = 0$
b) En este caso la segunda ecuación es proporcional a la primera: $2x - 2/3y = -1$
c) La segunda ecuación debe decir algo contradictorio con la primera: $6x - 2y = 1$

25. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss.
$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+3y-4z=9 \\ x-y+z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E3-E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=1 \\ y-6z=7 \\ -2y=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x+1-1=1 & \rightarrow & x=1 \\ 1-6z=7 & \rightarrow & z=-1 \\ y=1 & & \end{matrix}$$

La solución es: $x = 1$; $y = 1$; $z = –1$.

26. Resuelve los sistemas:
a) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x-4y+\frac{z}{2}=1 \\ \frac{x}{2}-z=3 \\ 2y-z=11 \end{cases}$

a) En el sistema $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x+2y+z=1 \\ 4x+2y-3z=11 \end{cases}$ ponemos en primer lugar la segunda ecuación y
$$\begin{matrix} \\ E2-2E1 \\ E4-4E1 \end{matrix} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+z=-1 \\ -6y-7z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 6E2+5E3 \end{matrix} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+z=-1 \\ -29z=29 \end{cases}$$

y el sistema escalonado nos da las soluciones: $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$

b) En el sistema $\begin{cases} 2x-4y+\frac{z}{2}=1 \\ \frac{x}{2}-z=3 \\ 2y-z=11 \end{cases}$ multiplicamos la segunda ecuación por 2 y la cambiamos por la primera quedando:
$$\begin{cases} x-2z=6 \\ 2x-4y+\frac{z}{2}=1 \\ 2y-z=11 \end{cases} \Leftrightarrow E2-2E1 \begin{cases} x-2z=6 \\ -4y+\frac{9}{2}z=-11 \\ 2y-z=11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$2E3-E2 \begin{cases} x-2z=6 \\ -4y+\frac{9}{2}z=-11 \\ \frac{9}{2}z=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{74}{5} \\ y=\frac{154}{20}=\frac{77}{10} \\ z=\frac{22}{5} \end{cases}$$

27. Dos números se diferencian en 53 unidades. Al dividir el mayor entre el menor, se obtiene de cociente 2 y resto 21. Calcula cada número.

Sea el número mayor e y el menor. Se cumple:
$$\begin{cases} x-y=53 \\ x=2y+21 \end{cases} \Rightarrow x=85;\ y=32$$

28. Se mezclan dos tipos de pipas de girasol, de 6,6 y 8,7 euros/kg, respectivamente, obteniéndose 200 kgs. Al secarse, pierden un 12 % de su peso, vendiéndose el conjunto a 9,6 euros/kg. ¿Qué cantidad de cada clase de pipas se tenía en un principio si el valor de la venta ha sido el mismo?

Sean x e y los kilos originarios de cada tipo de pipas.
Nos dicen que $x + y = 200$.
Además, al perderse un 12 % = 0,12 de peso, nos quedará 0,88 por cada kilogramo, en total $200 \cdot 0,88 = 176$ kilos.
El valor de esas pipas es: $176 \cdot 9,6 = 1\,689,6$ €.
El valor inicial era $6,6x + 8,7y$ €.
Como son iguales: $6,6x + 8,7y = 1\,689,6$.
Se obtiene el sistema siguiente, que resolveremos por sustitución:
$$\begin{cases} x+y=200 \\ 6,6x+8,7y=1689,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ 6,6x+8,7y=1689,6 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} y=200-x \\ 6,6x+8,7(200-x)=1689,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ 6,6x-8,7=1689,6-1740 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ -2,1x=-50,4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=200-x \\ x=\frac{50,4}{2,1}=24 \end{cases}$$

Se mezclaron, entonces, 24 kg de un tipo e $y = 200 - 24 = 176$ kilos del otro tipo de pipas.

29. Halla las dimensiones de un rectángulo sabiendo que el lado mayor es $\frac{5}{3}$ del menor y que si éste aumenta en 2 m la relación se convierte en $\frac{3}{2}$.

Sea x el lado mayor e y el menor. Se verifica:
$x=\frac{5}{3}$ y en sus dimensiones originales y al aumentar el pequeño en 2 m se cumple que: $x=\frac{3}{2}(y+2)$.

Estas relaciones forman el sistema $\begin{cases} x=\frac{5}{3}y \\ x=\frac{3}{2}(y+2) \end{cases}$,

cuya solución es: $x = 30$ m, $y = 18$ m.

30. Un cicloturista recorre 87 km en 4,5 h. La primera parte de la ruta es cuesta arriba y su velocidad es de 15 km/h, mientras que la segunda parte es descendente y su velocidad se eleva a 42 km/h. Halla la longitud de cada tramo.

Si denominamos por x los km del tramo ascendente e y los del tramo descendente. La relación de la cinemática: espacio = velocidad · tiempo, ($e = vt$) nos proporciona las relaciones:
$x = 15 \cdot t$, $y = 42 \cdot (t - 4,5)$, pues 4,5 h es el tiempo empleado en todo el recorrido.
Además, el total de kilómetros establece que $x + y = 87$, luego se tiene el sistema:

$$\begin{cases} x=15\cdot t \\ y=42\cdot(4{,}5-t) \\ x+y=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{42}=4{,}5-\dfrac{x}{15} \\ x+y=87 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x+5y=945 \\ x+y=87 \end{cases}$$

La solución que proporciona es $x=\dfrac{170}{3}$ km e $y=\dfrac{91}{3}$ km

31. Discute, según los diferentes valores de *a*, el sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=6 \\ ax-\dfrac{y}{2}=1 \end{cases}$$

El sistema es incompatible si $\dfrac{-1/3}{a}=\dfrac{1/5}{-1/2}\neq\dfrac{6}{1}\Rightarrow a=\dfrac{5}{6}$ y por tanto determinado si a diferente de 5/6. Nunca será indeterminado.

32. Dado el sistema $\begin{cases} -x+\dfrac{1}{2}y=a \\ 3x+by=2 \end{cases}$**, halla *a* y *b* para que el sistema sea determinado, indeterminado e incompatible.**

El sistema es incompatible cuando $\dfrac{-1}{3}=\dfrac{1/2}{b}\neq\dfrac{a}{2}$ que ocurre si $b=-3/2$ y $a\neq-2/3$

Determinado es si $b\neq-3/2$, cualquiera que sea el valor de a.

33. La suma de las tres cifras de un número es 8. Si se cambian la cifra de las decenas por la de centenas, el número resultante es 90 unidades mayor. Además, la diferencia entre la cifra de unidades y el doble de la de decenas nos da la cifra de las centenas. Halla el número.

Sea el número *xyz*, cuyo valor será: $100x+10y+z$. En estas condiciones, pondremos las relaciones entre sus cifras:
$x+y+z=8$, $z-2y=x$.
Respecto al valor del número, las condiciones del enunciado nos dan: $100y+10x+z=100x+10y+z+90$. Estas ecuaciones forman el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=8 \\ z-2y=x \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=8 \\ x+2y-z=0 \\ 90x-90y=-90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=8 \\ x+2y-z=0 \\ x-y=-1 \end{cases}$ que podemos resolver escalonadamente,

resultando: $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=8 \\ x-y=-1 \\ 5x=5 \end{cases}$, es decir $x=1$, $y=2$, $z=5$.

El número es 125.

34. Una empresa ha invertido 73 000 € en la compra de ordenadores portátiles de tres clases *A*, *B* y *C*, cuyos costes por unidad son de 2 400 €, 1 200 € y 1 000 € respectivamente. Sabiendo que, en total, ha adquirido 55 ordenadores y que la cantidad invertida en los de tipo *A* ha sido la misma que la invertida en los de tipo *B*, averiguar cuántos aparatos ha comprado de cada clase.

Supongamos que el número de ordenadores que se compran de las clases *A*, *B* y *C* son *x*, *y*, *z* respectivamente.

Cantidad invertida: $2\,400x+1\,200y+1\,000z=73\,000\Rightarrow$
$12x+6y+5z=365$
Nº de ordenadores: $x+y+z=55$
Relación entre cantidades: $2\,400x=1\,200y\Rightarrow 2x=y$. Así tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 12x+6y+5z=365 \\ x+y+z=55 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \text{(sustituyendo } y=2x)$$

$$\begin{cases} 48x+10z=730 \\ 3x+z=55 \end{cases} \Rightarrow \quad E1-10E2 \begin{cases} 18x=180 \\ 3x+z=55 \end{cases} \Rightarrow$$

$x=10$, $y=20$, $z=25$

35. En los tres cursos de una diplomatura hay matriculados un total de 350 alumnos. El número de matriculados en primer curso coincide con los de segundo más el doble de los de tercero. Los alumnos matriculados en segundo más el doble de los de primero superan en 250 al quíntuplo de los de tercero. Calcula el número de alumnos que hay matriculados en cada curso.

Si el número de alumnos de 1º, 2º y 3º son *x*, *y*, *z*, respectivamente, se tiene:

$$\begin{cases} x+y+z=350 \\ x=y+2z \\ 2x+y=5z+250 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=350 \\ x-y-2z=0 \\ 2x+y-5z=250 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ E2-E1 \\ E3-2E1 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=350 \\ -2y-3z=-350 \\ -y-7z=-450 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ 2E3+E2 \end{matrix} \begin{cases} x+y+z=350 \\ 2y+3z=350 \\ 11z=550 \end{cases} \Rightarrow z=50,\ y=100,\ z=200,$$

36. En la fabricación de cierta marca de chocolate se emplea leche, cacao y almendras, siendo la proporción de leche doble que la de cacao y almendras juntas. Los precios de cada kilogramo de los ingredientes son: leche, 0,8 €; cacao, 4 €; almendras, 13 €. En un día se fabrican 9 000 kilos de ese chocolate, con un coste total de 25 800 €. ¿Cuántos kg se utilizan de cada ingrediente?

Sean *x*, *y*, *z* los kilos de leche, cacao y almendras, respectivamente, que se emplean cada día.
Debe cumplirse:
$x+y+z=9\,000$
$x=2(y+z)$
$0{,}8x+4y+13z=25\,800$
Queda el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=9\,000 \\ x-2y-2z=0 \\ 0{,}8x+4y+13z=25\,800 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \\ E2+2E1 \\ E3-4E1 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+y+z=9\,000 \\ 3x=18\,000 \\ -3{,}2x+9z=-10\,200 \end{cases}$$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la tercera y en la primera ecuación, se obtiene: $x=6\,000$; $y=2\,000$;

$z = 1000$. Se utilizan 6000 kg de leche, 2000 kg de cacao y 1000 kg de almendras.

Tipo V. Sistemas no lineales.

37. Resuelve el sistema $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases}$ y representa gráficamente las soluciones.

Lo resolvemos por igualación: $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=x^2 \Rightarrow x=x^4$

$\Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$

Para $x=0$, $y=0$; para $x=1$, $y=1$. O sea, los puntos solución son (0, 0) y (1, 1).

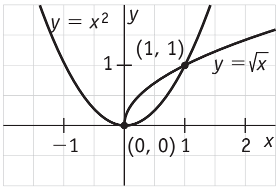

Fig. 4.1.

38. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{y+x}{6}=\dfrac{5}{6} \\ xy=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y-x=x-1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-y^2=24 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{y+x}{6}=\dfrac{5}{6} \\ xy=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ y=\dfrac{6}{x} \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{6}{x}=5 \Rightarrow x^2-5x+6=0,$

con soluciones $x=3$ y $x=2$, lo que induce $y=2$ e $y=3$, respectivamente.

b) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$, despejamos $y=2/x$ en la 2ª ecuación y sustituimos en la 1ª: $2x^2+\dfrac{12}{x^2}=11 \Rightarrow 2x^4-11x^2+12=0$, ecuación bicuadrada que nos proporciona las 4 soluciones, $x=\pm 2$ y $x=\pm\sqrt{3}/2$ y sus correspondientes de $y=\pm 1$ e $y=\pm 4/\sqrt{3}$.

c) $\begin{cases} y-x=x-1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2x-1 \\ x^2+(2x-1)^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+4x^2+1-4x=2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x^2-4x-1=0$

nos da $x=1$ y $x=-1/5$ como soluciones, induciendo los valores de $y=1$ e $y=-7/5$

d) $\begin{cases} x-y=4 \\ x^2-y^2=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4+y \\ (4+y)^2-y^2=24 \end{cases} \Rightarrow$

desarrollando la segunda ecuación obtenemos, $16+8y=24$ $\Rightarrow y=1 \Rightarrow x=5$

39. Las longitudes de la altura y la base de un rectángulo cuya área mide 20 cm² son dos números enteros consecutivos. ¿Cuánto mide la altura?

Llamemos x y $x+1$ las longitudes de los lados del rectángulo, por ello: $x(x+1)=20 \Rightarrow x^2+x-20=0 \Rightarrow x=4$ como única solución aceptable.

40. Encuentra las dimensiones de un rectángulo de perímetro 110 m y área 700 m².

Designemos por x e y las longitudes de los lados, entonces puede plantearse el sistema:

$\begin{cases} 2x+2y=110 \\ xy=700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=55 \\ xy=700 \end{cases} \Rightarrow$ despejamos y en la 1ª ecuación y sustituimos en la 2ª: $x(55-x)=700 \Rightarrow x^2-55x+700=0 \Rightarrow x=35$, $x=20$ que inducen los valores de $y=20$ e $y=35$.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 10 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. Encuentra tres soluciones de la ecuación $-x+5y=10$ y haz una representación gráfica de la misma.

$x=5y-10 \Rightarrow$ tres pares de valores solución pueden ser: $y=2$, $x=0$; $y=1$, $x=-5$; $y=3$, $x=5$.

2. ¿Son equivalentes los sistemas $\begin{cases} x=3 \\ \dfrac{y-x}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ y $\begin{cases} y-1=3 \\ 2x=y-2 \end{cases}$?

No, ya que $x=3$, $y=4$ es solución del primer sistema y no lo es del segundo.

3. Añade una ecuación al sistema $\begin{cases} x+y=0 \\ y=-1 \end{cases}$ de modo que resulte incompatible.

Por ejemplo, una ecuación contradictoria con la primera: $x+y=5$

4. Resuelve el sistema $\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+1=-x \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=-1 \\ y+1=-x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x=2y-1 \\ -y-1=x \end{cases} \Leftrightarrow 2y-1=-y-1 \Rightarrow y=0, x=-1$

5. Encuentra gráficamente la solución del sistema $\begin{cases} x=-1+y \\ x+y=1 \end{cases}$

La solución puede verse es $x=0$ e $y=1$

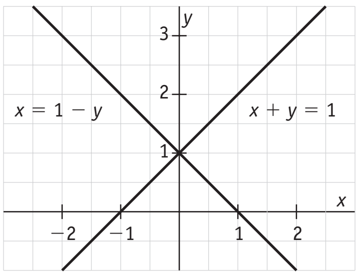

Fig. 4.2.

6. Resuelve la ecuación $(x+2)(3x-1)=0$.

$(x+2)(3x-1)=0 \Rightarrow 3x^2+5x-2=0 \Rightarrow x=-2,\ x=1/3$

7. Halla las soluciones válidas de $\frac{x^3+x^2}{x^2}=0$.

$\frac{x^3+x^2}{x^2}=0 \Rightarrow x^3+x^2=x^2(x+1)=0 \Rightarrow x=-1$ ($x=0$ o puede admitirse).

8. Resuelve la ecuación $\frac{\sqrt{x}}{2}=x$.

$\frac{\sqrt{x}}{2}=x \Rightarrow \sqrt{x}=2x \Rightarrow x=4x^2 \Rightarrow x(4x-1)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=1/4$ son las soluciones, ambas válidas.

9. Razona si los sistemas $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=1-y \\ 2x-y=1 \end{cases}$ y $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=1-y \\ 2x-y=1 \\ y=3x-1 \end{cases}$ son equivalentes sabiendo que $x=y=1$ es solución del primero.

No, ya que la tercera ecuación del segundo sistema no es satisfecha por $x=y=1$

10. Un padre tiene 36 años y su hija 6. ¿Dentro de cuántos años la edad del padre será triple que la de la hija?

Si esto ocurrirá dentro de x años, las edades respectivas serán: $36+x$ y $6+x$;
y la relación entre ellas, el triple: $36+x=3(6+x)$.
La solución de esta ecuación es $x=9$ años.

Actividades

1. Un vendedor de libros tiene un contrato con una editorial, por el cual percibe 300 euros de sueldo fijo más 90 euros por enciclopedia que venda. Recibe una oferta de trabajo de otra editorial, por la que le ofrecen 140 euros por cada venta, pero sin remuneración fija. ¿Cuántas enciclopedias debe vender para que le convenga, económicamente, cambiar de editorial?

Si x es el número de enciclopedias vendidas, para la primera editorial cobra: $300 + 90 \cdot x$ y para la segunda, $140 \cdot x$. Si queremos que
$300 + 90x < 140x$ esta condición se cumple si $x > \dfrac{300}{140-90} = 6$

2. Halla el conjunto de soluciones del sistema $\begin{cases} 2x+3<5 \\ 5-x<7 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x+3<5 \\ 5-x<7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{5-3}{2}=1 \\ 5-7=2<x \end{cases} \Leftrightarrow -2<x<1$$

3. Halla la solución de las inecuaciones:
a) $x^2 - 2x - 3 < 0$;
b) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;
c) $x^2 + 4 > 0$

a) Las soluciones de la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ son $x = -1$ y $x = 3$, por lo que
$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. A la vista de los signos de cada binomio, se forma la tabla:

	$-\infty$ — -1	-1 — 3	3 — $+\infty$
$x + 1$	−	+	+
$x - 3$	−	−	+
$(x + 1)(x - 3)$	−	+	+

donde se deduce que en el intervalo $(-1, 3)$ el trinomio $x^2 - 2x - 3$ es negativo.

b) La ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución real, resultando que para todo valor de x, $x^2 - 2x + 2$ es mayor que 0 por lo que la inecuación propuesta no tiene solución.

c) $x^2 + 4 = 0$, como en el caso anterior, no tiene solución real y $x^2 + 4$ es siempre positivo, siendo todo número real solución.

4. Halla la solución de la inecuación $(x^2 - 4)(x - 1)(x - 5) < 0$.

Estudiamos el signo de cada uno de los factores:

	$-\infty$ — -2	-2 — 1	1 — 2	2 — 5	5 — ∞
$x + 2$	−	+	+	+	+
$x - 1$	−	−	+	+	+
$x - 2$	−	−	−	+	+
$x - 5$	−	−	−	−	+
Producto	+	−	+	−	+

La solución es:

5. Encuentra las soluciones de las inecuaciones:

a) $0 \leqslant \dfrac{x^2-4}{x+1}$ **b) $2 < \dfrac{x^2+1}{x}$**

a) Como $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ podemos formar la tabla:

	$-\infty$ — -2	-2 — -1	-1 — 2	2 — ∞
$x + 2$	−	+	+	+
$x + 1$	−	−	+	+
$x - 2$	−	−	−	+
$\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+1}$	−	+	−	+

Donde vemos la solución $[-2, -1) \cup [2, \infty)$

b) $2 < \dfrac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2+1}{x} - 2 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{x^2+1-2x}{x} \Leftrightarrow 0 < \dfrac{(x-1)^2}{x}$ ya que $(x - 1)2$ siempre es positivo, el signo del cociente depende de x, así que la solución es el intervalo $(0, \infty)$

6. Resuelve la inecuación $|x^2 - 6x| < 5$.

$|x^2 - 6x| < 5 \Leftrightarrow -5 < x^2 - 6x < 5 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 6x + 5$ y
$x^2 - 6x - 5 < 0$
La solución de $0 < x^2 - 6x + 5$ es $x < 1$ o $x > 5$:
$x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$
La solución de $x^2 - 6x - 5 < 0$ son todos los puntos del intervalo, $(3\sqrt{14}, 3+\sqrt{14})$
pues las soluciones de $x^2 - 6x - 5 < 0$ son $x = 3 - \sqrt{14}$ y $x = 3 + \sqrt{14}$
Por tanto, la solución de $|x^2 + 6x| < 5$ son todos los valores de $x \in (3 - \sqrt{14}, 1) \cup (5, 3 + \sqrt{14})$

7. Halla la solución de las inecuaciones:

a) $\sqrt{x-1} \geqslant -1$ **b) $\dfrac{\sqrt{2x+2}}{3} < 1$**

a) $\sqrt{x-1} \geqslant -1 \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 \geqslant (-1)^2 \Rightarrow x - 1 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 2$; pero para que exista la raíz $x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$, así que la solución será: $[1, \infty) \cap [2, \infty) = [1, \infty)$

b) $\dfrac{\sqrt{2x+2}}{3} < 1 \Rightarrow$
$(\sqrt{2x+2})^2 < 3 \Rightarrow 2x+2 < 9 \Rightarrow x < \dfrac{9-2}{2} = \dfrac{7}{2}$;
de nuevo, para que exista el numerador $2x+2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -1$. Así pues, la solución global es
$[-1, \infty) \cap (-\infty, 7/2) = [-1, 7/2)$

8. Halla la solución gráfica del sistema $\begin{cases} 2x-y > 1 \\ 5x+10y \leqslant 30 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x-y > 1 \\ 5x+10y \leqslant 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y > 1 \\ x+2y \leqslant 6 \end{cases}$$

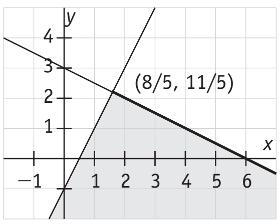

Fig. 5.1.

Problemas propuestos

Tipo I. Inecuaciones de primer grado.

1. Resuelve las inecuaciones:

a) $3x < 0$ **b)** $\frac{x}{5} \geqslant -1$

c) $1 - \frac{x}{2} \leqslant \frac{2}{3}$ **d)** $\frac{2}{x} < \frac{-1}{2}$

a) $x < 0$ b) $x \geqslant -5$

c) $x \geqslant 2/3$ d) $\frac{2}{x} < \frac{-1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2} > -2 \Rightarrow x > -4$

2. Halla el intervalo solución de las inecuaciones:

a) $\frac{x}{3} - 5x \leqslant 1 - \frac{x}{2}$ **b)** $\frac{x+3}{-2} < \frac{x-1}{6} + 1$

a) $\frac{x}{3} - 5x \leqslant 1 - \frac{x}{2} \Rightarrow 2x - 30 \leqslant 6 - 3x \Rightarrow -6 \leqslant 25x \Rightarrow -6/25 \leqslant x$

b) $\frac{x+3}{-2} < \frac{x-1}{6} + 1 \Rightarrow -3x - 9 < x - 1 + 6 \Rightarrow -14 < 4x \Rightarrow -7/2 < x$

3. Halla el intervalo solución de $\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{5}{x}$

$\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} \leqslant \frac{5}{x}$ (multiplicamos por x^2 los dos miembros) $\Rightarrow$
$3 - x \leqslant 5x \Rightarrow 3 < 6x \Rightarrow 1/2 < x$

4. Un pastor afirma que en su rebaño de 120 ovejas, el triple de las *churras* es mayor que el cuádruplo de las *merinas*. ¿Qué número mínimo de ovejas *churras* tiene el rebaño?

Sean x el número de *churras*: $3x > 4(120 - x) \Rightarrow 7x > 480 \Rightarrow$
$x > 480/7 = 68{,}57 \Rightarrow x \geqslant 69$ ovejas.

5. Halla los valores de *a* para los que el punto (−3, 1) es solución de la inecuación $ax - 2y > -2$

Si el punto (−3, 1) es solución, se debe cumplir:
$-3a - 2 > -2 \Rightarrow a < 0$

Tipo II. Inecuación de segundo grado.

6. Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $x(x+1) < 0$ **b)** $-2x^2 + 10 > 26$

c) $4x^2 + 4x > 0$

a) $x(x+1) < 0$ las raíces son −1 y 0, por lo que :

	$-\infty$ … -1	-1 … 0	0 … $+\infty$
$x+1$	−	+	+
x	−	−	+
$(x+1)\cdot x$	+	−	+

Y la solución será el intervalo: (−1, 0)

b) $-2x^2 + 10 > 26 \Rightarrow 2x^2 < -16$ ¡que es imposible!

c) $4x^2 + 4x > 0 \Rightarrow 4x(x+1) > 0$ y recordando el caso a) la solución es el intervalo unión de $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

7. Halla el intervalo solución de:

a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$ **b)** $-2x^2 + 9x + 18 < 0$

a) La ecuación $4x^2 + 4x + 1 = 0$ tiene una solución doble $x = -\frac{1}{2}$, por lo que: $4x^2 + 4x + 1 = 4(x + \frac{1}{2})^2$ que siempre es positivo, luego la inecuación $4x^2 + 4x + 1 > 0$ se cumple para todo $\mathbf{R} - \{-\frac{1}{2}\}$.

b) Si cambiamos de signo la inecuación nos queda:
$2x^2 - 9x - 18 > 0$. Como las raíces de la ecuación $2x^2 - 9x - 18 = 0$ son $x = 6$ y $x = -\frac{3}{2}$,
$2x^2 - 9x - 18 = 2(x - 6)(x + \frac{3}{2})$ y construyendo el diagrama:

	$-\infty$ … $-3/2$	$-3/2$ … 6	6 … $+\infty$
$x + 3/2$	−	+	+
$x - 6$	−	−	+
$(x + 3/2)\cdot(x - 6)$	+	−	+

vemos que en los intervalos $(-\infty, -\frac{3}{2})$ y $(6, \infty)$ se verifica que $2x^2 - 9x - 18 > 0$.

8. Halla gráficamente la solución de las inecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 + 9x < 0$ **b)** $3x^2 - 27 > 0$

c) $(x+1)(x-3) > 0$

a) La parábola $y = 2x^2 + 9x$ corta al eje de abscisas en los puntos $2x^2 + 9x = x(2x+9) = 0$, es decir en $x = 0$ y $x = -\frac{9}{2}$. Su gráfica evoluciona como se muestra y es negativa en $(-\frac{9}{2}, 0)$.

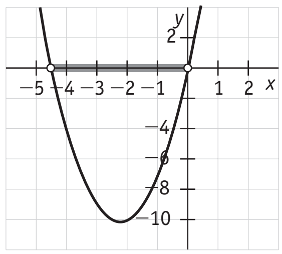

Fig. 5.2.

b) La parábola $y = 3x^2 - 27$ corta al eje OX en $x = \pm 3$. En este caso la gráfica aparece como en la Figura y las semirrectas solución son las representadas.

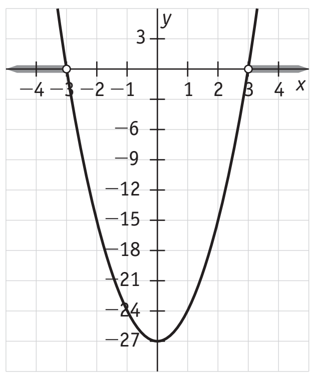

Fig. 5.3.

c) La parábola $y = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$ interseca al eje de abscisas en los puntos $x = -1$ y $x = 3$. La Figura nos muestra la solución:

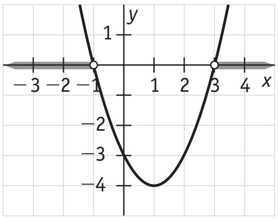

Fig. 5.4.

9. Se dispone de un terreno en forma de triángulo rectángulo en el que un cateto tiene triple longitud que el otro. ¿A partir de qué largura del lado menor la superficie del terreno es superior a 37,5 m²?

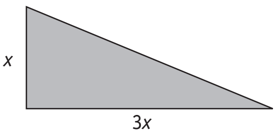

Fig. 5.5.

Sea x la longitud del cateto menor y entonces $3x$ será la del mayor. El área del triángulo es $A = \frac{1}{2}x \cdot 3x = \frac{3x^2}{2}$ que ha de superar los 37,5 m². Luego

$\frac{3x^2}{2} > 37{,}5 \Rightarrow 3x^2 > 75 \Rightarrow x^2 > 25 \Rightarrow x^2 - 25 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+5)(x-5) > 0$. Inecuación que por el cuadro que construimos

$-\infty \qquad -5 \qquad 5 \qquad +\infty$

$x+5$	−	+	+
$x-6$	−	−	+
$(x+5)\cdot(x-5)$	+	−	+

nos proporciona como única solución admisible los valores del intervalo $(5, \infty)$ pues en otro caso, tendríamos longitudes negativas.

10. Halla los valores que pueden tener las longitudes de los lados de un rectángulo si su perímetro ha de ser menor que 20 metros y su área igual a 9 m².

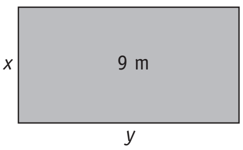

Fig. 5.6.

Se ha de cumplir que el perímetro $2x + 2y < 20$ y el área $x \cdot y = 9 \Leftrightarrow y = 9/x$. Así, sustituyendo en la inecuación:
$2x + 2 \cdot 9/x < 20 \Rightarrow x + 9/x < 10 \Rightarrow x^2 + 9 - 10x < 0 \Rightarrow (x-9)(x-1) < 0$, que se resuelve

$-\infty \qquad 1 \qquad 9 \qquad +\infty$

$x-1$	−	+	+
$x-9$	−	−	+
$(x-1)\cdot(x-9)$	+	−	+

Como x ha de cumplir $1 < x < 9$, la variable y varía $9 > y > 1$ pues su producto es constante igual a 9.

Tipo III. Otras inecuaciones.

11. Resuelve:
a) $x^3 < -1$ b) $x^3 + 8 \geqslant 0$ c) $\frac{1}{x^3} < 1$

Son inmediatas.
a) $x^3 < -1 \Leftrightarrow x < -1$
b) $x^3 + 8 \geqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \geqslant -8 \Leftrightarrow x \geqslant -2$
c) Para $x < 0$, siempre se cumple.
Para $x > 0$, $\frac{1}{x^3} < 1 \Leftrightarrow 1 < x^3 \Rightarrow x < 1$.
La solución es: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$

12. Halla el conjunto solución de:
a) $x^4 + x^2 > 3$ b) $x^4 - x^2 \leqslant 0$
c) $x^4 + 1 < 0$ d) $(x+1)^3(x-2) \geqslant 0$

a) $x^4 + x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x^2+1) > 0$, que se cumple para todo x, menos para $x = 0$.
b) $x^4 - x^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \leqslant 0 \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$
c) $x^4 + 1 < 0$ no tiene solución, pues siempre es $\geqslant 1$
d) $(x+1)^3(x-2) \geqslant 0$. Marcamos en la recta $x = -1$ y $x = 2$:

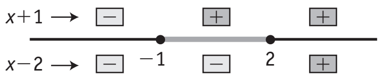

Fig. 5.7.

La solución es $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

13. Resuelve:
a) $x^4 - 8x^2 + 16 \leqslant 0$
b) $2x^4 + x^2 - 3 \geqslant 0$
c) $x^4 - 3x^2 + 2 < 0$
d) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 > 0$

En todos los casos se descompone en factores; hay que observar que las tres primeras expresiones son bicuadradas.
a) $x^4 - 8x^2 + 16 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x^2-4)^2 \leqslant 0$, que sólo se cumple cuando $x = \pm 2$.
b) $2x^4 + x^2 - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2+3/2) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
c) $x^4 - 3x^2 + 2 < 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-2) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1] \cup [1, +\sqrt{2})$
d) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x^2+2) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

14. Halla la solución de:
a) $\frac{2}{3x-2} \leqslant 0$ b) $\frac{x+2}{2x-1} \leqslant 1$ c) $0 \leqslant \frac{-x}{x^2+1}$

a) Como el numerador es positivo en $\frac{2}{3x-2} \leqslant 2 \Rightarrow 3x - 2 < 0$ para que el cociente sea negativo, así $x < 2/3$.

b) $\frac{x+2}{2x-1} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{x+2}{2x-1} - 1 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{3-x}{2x-1} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{3-x}{2(x-1/2)} \leqslant 0$

que da lugar a la tabla:

	$-\infty$ 1/2	1/2 3	3 $+\infty$
$3-x$	+	+	−
$x-1/2$	−	+	+
$\dfrac{3-x}{2(x-1/2)}$	−	+	−

Y la solución es $(-\infty,\ 1/2)\cup[3,\ \infty)$

c) En $0\leqslant\dfrac{-x}{x^2+1}$ el denominador es siempre positivo, así que $-x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant 0$

15. Representa en la recta la solución de las inecuaciones:

a) $\left|\dfrac{x}{4}\right|\leqslant 1$ **b)** $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\geqslant 2$

c) $\left|\dfrac{x}{3}-2\right|\leqslant -1$

a) $\left|\dfrac{x}{4}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow -1\leqslant x/4\leqslant 1 \Rightarrow -4\leqslant x\leqslant 4$

Fig. 5.8.

b) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\geqslant 2 \Leftrightarrow \quad x+\dfrac{1}{2}\geqslant 2$ o bien $x+\dfrac{1}{2}\leqslant -2 \quad \Rightarrow x\geqslant 3/2$ o bien $x\leqslant -5/2$. La solución es: $(-\infty,\ -5/2]\cup[3/2,\ \infty)$.

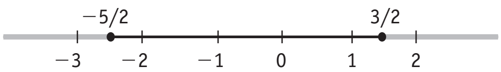

Fig. 5.9.

c) $\left|\dfrac{x}{3}-2\right|\leqslant -1$ es imposible pues el valor absoluto da valores siempre positivos

16. Resuelve las inecuaciones:

a) $|x^2-3|\leqslant 1$ **b)** $|x^2-3|<3$ **c)** $|x^2-3|\leqslant 6$

a) $|x^2-3|\leqslant 1 \Leftrightarrow 2\leqslant x^2\leqslant 4 \Leftrightarrow x\in[-2,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},2]$

b) $|x^2-3|<3 \Leftrightarrow 0<x^2<6 \Leftrightarrow x\in(-\sqrt{6},\sqrt{6})-\{0\}$

c) $|x^2-3|\leqslant 6 \Leftrightarrow -3\leqslant x^2\leqslant 9 \Leftrightarrow x\in[-3,3]$

17. Resuelve las inecuaciones:

a) $|x^2-x|\leqslant 1$ **b)** $|x^2+2x|\leqslant 0$ **c)** $|x^2+4x|\geqslant 4$

a) $|x^2-x|\leqslant 1 \Leftrightarrow 0\leqslant x^2-x+1$ y $x^2-x-1\leqslant 0 \Leftrightarrow$

$x\in\left[\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

b) $|x^2+2x|\leqslant 0 \Leftrightarrow 0\leqslant x^2+2x\leqslant 0 \Leftrightarrow x^2 2x=0 \quad \Leftrightarrow x=-2$ o $x=0$

c) $|x^2+4x|\geqslant 4 \Leftrightarrow 0\geqslant x^2+4x+4$ o $x^2+4x-4\geqslant 0 \quad \Leftrightarrow$
$x\in(-\infty,-2-2\sqrt{2}]\cup[-2,+2\sqrt{2},+\infty]\cup\{-2\}$

18. Resuelve las inecuaciones:

a) $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1}{3}$ **b)** $\sqrt{x+2}>2$ **c)** $\dfrac{-1}{\sqrt{2x+3}}>-2$

a) $\sqrt{x}\leqslant\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 0\leqslant x\leqslant 1/9$ que es el intervalo $[0,\ 1/9]$

b) Para que $\sqrt{x+2}>2$ debe de cumplirse $x+2\geqslant 0$ para que exista la raíz y $(\sqrt{x+2})^2>2^2$. Entonces, $x>-2$ y $x+2>4 \Leftrightarrow x>2$, que se verifica si $x>2$.

c) $\dfrac{-1}{\sqrt{2x+3}}>-2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}<2 \Rightarrow \dfrac{1}{2}<\sqrt{2x+3}$ que se cumplirá de nuevo si:

- $2x+3\geqslant 0 \Rightarrow x\geqslant -3/2$ y
- $(1/2)^2<2x+3 \Rightarrow 1/4-3<2x \Rightarrow -11/8<x$ que se verifica si $x>-11/8$

Tipo IV. Inecuaciones lineales con dos incógnitas.

19. Resuelve las inecuaciones:

a) $y>-1$ **b)** $\dfrac{y}{2}-1\leqslant 2$ **c)** $y\leqslant -x$

a) $y=-1$ es la recta representada y el área sombreada es la solución

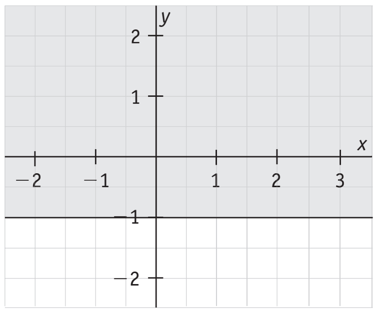

Fig. 5.10.

b) $\dfrac{y}{2}-1\leqslant 2 \Leftrightarrow y\leqslant 6$; si representamos la recta $y=6$, se obtiene la región

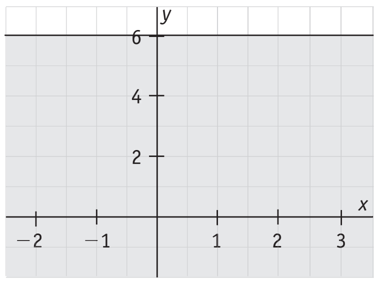

Fig. 5.11.

c) Se representa la recta $y=-x$ que es la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes:

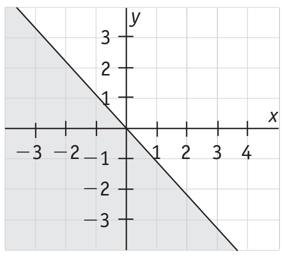

Fig. 5.12.

20. Halla en el plano la solución de:

a) $x - 2y \leqslant -1$

b) $\dfrac{x}{2} + y \geqslant 2$

c) $\dfrac{x-4y}{3} \geqslant 0$

a) La gráfica de la recta $x - 2y = -1$ es la mostrada en la gráfica y el área coloreada es la solución:

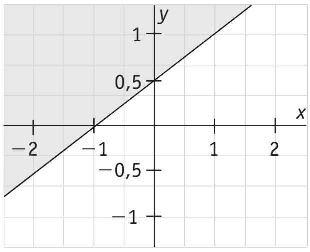

Fig. 5.13.

b) Dibujamos la recta $\dfrac{x}{2} + y = 2$ y el área por encima de ella es la solución de la inecuación planteada:

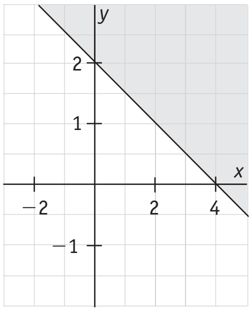

Fig. 5.14.

c) $\dfrac{x-4y}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow x - 4y \geqslant 0$ y representamos la recta $x - 4y = 0$, estando por debajo de ella la solución:

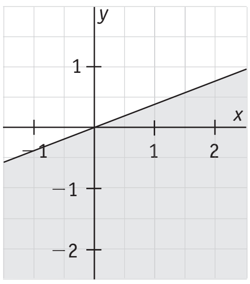

Fig. 5.15.

21. Resuelve gráficamente las inecuaciones:

a) $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{y}{2} \leqslant -1$

b) $\dfrac{x-y}{4} + \dfrac{y-x}{2} < 1$

a) La inecuación propuesta es equivalente a la $2x - 3y \leqslant 10$. Representamos la igualdad $2x - 3y = 10$ y se observa el área solución:

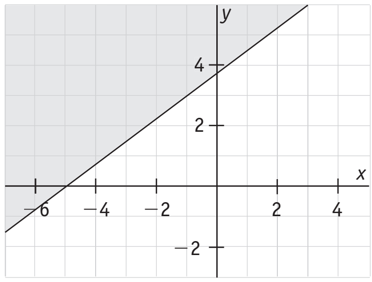

Fig. 5.16.

b) Simplificada la inecuación queda equivalente a $y - x < 4$; dibujemos la recta $y - x = 4$, mostrando la región solución:

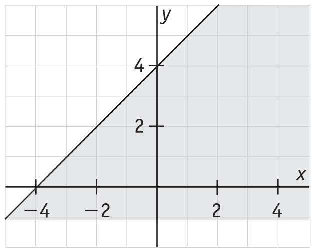

Fig. 5.17.

22. Halla los valores de *m* para los que el punto (1, *m*) es solución de la inecuación $-x - 2y < 1$

Si el punto es solución debe cumplir: $-1 - 2m < 1 \Rightarrow 2m > -2 \Rightarrow m > -1$

23. Un representante percibe 5 € por cada artículo A vendido y 8 € por cada artículo B. Halla cuántos artículos debe vender para obtener unos ingresos al menos de 1 800 €.

Los ingresos dependen del número de artículos A(x) y B(y) vendidos, así que aquéllos serán: $5x + 8y$ que han de superar 1 800, o bien $5x + 8y > 1800$.

24. Una entrada de cine es de 6 € y un CD, 12 €. Indica qué combinaciones de gasto puede hacer Carlos entre esos dos artículos a lo largo del mes, si su presupuesto es de 72 € y teniendo en cuenta que no necesariamente ha de gastarse todos sus recursos en los bienes citados.

Llamemos x el número de entradas al cine e y el número de CD's que Carlos puede adquirir con su presupuesto en un mes, entonces $6x + 12y < 72 \Leftrightarrow x + 2y < 12$, con $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$; siendo x e y números naturales.

Tipo V. Sistemas de inecuaciones lineales con una o dos incógnitas

25. Halla la solución:

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} \geqslant -1 \\ x \leqslant 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{-3} \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x > 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 \geqslant x - 1 \\ x > 0 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} \geqslant -1 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 0$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{-3} \geqslant \dfrac{2}{3} \\ x>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant -2 \\ x>5 \end{cases}$

lo que no puede darse nunca ¡sistema imposible¡

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+1\geqslant x-1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{2}\leqslant 2 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 4 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow 0<x\leqslant 4$

26. Resuelve dando el resultado en forma de intervalo:

a) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ 2x-1 \geqslant 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ 2x-3 > 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-1\leqslant 2 \\ 2x>-1 \\ \dfrac{x}{2}\leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases}$

a) $\begin{cases} x \leqslant 2 \\ 2x-1 \geqslant 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 2 \\ x\geqslant 7/2 \end{cases}$

que no puede verificarse, luego conjunto solución ϕ

b) $\begin{cases} x \geqslant 2 \\ 2x-3 > 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2 \\ x > 8/2=4 \end{cases} \Rightarrow x > 4 \Leftrightarrow (4,\infty)$

c) $\begin{cases} x-1\leqslant 2 \\ 2x>-1 \\ \dfrac{x}{2}\leqslant \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant 3 \\ x>-\dfrac{1}{2} \\ x\leqslant \dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$ al intervalo $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

27. Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} x-y \leqslant 2 \\ 2x \geqslant 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2(x-1)-y \leqslant 2 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x-\dfrac{y-1}{-1}\leqslant 0 \\ 1\leqslant x\leqslant 3 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$

a) Representamos en el mismo sistema de ejes coordenados las rectas $x-y=2$ y $x=3$:

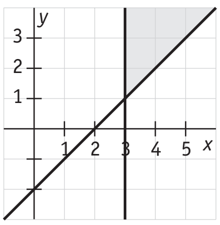

Fig. 5.18.

y las semirrectas, junto con el ángulo determinado es la solución.

b) En este caso las rectas a representar son $2x-y=4$ e $y=0$:

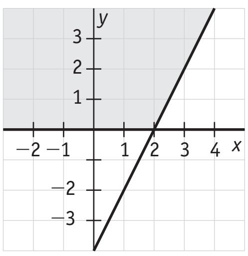

Fig. 5.19.

y la solución del sistema aparece marcada.

c)

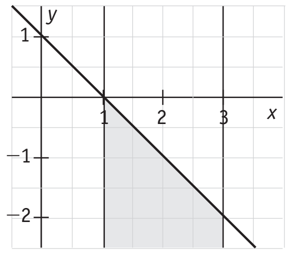

Fig. 5.20.

28. Encuentra el sistema cuya solución es la zona sombreada de la figura.

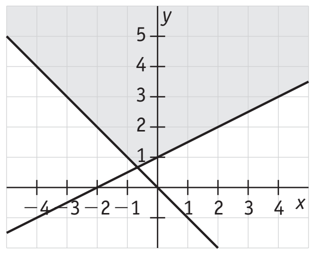

Fig. 5.21.

La recta que pasa por los puntos $(-2, 0)$ y $(0, 1)$ tiene por ecuación: $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{1}=1$ y la segunda recta es $y=-x$ (pasa por $(0, 0)$ y $(-2, 2)$), por lo que las inecuaciones serán:

$\begin{cases} -\dfrac{x}{2}+y>1 \\ y\geqslant -x \end{cases}$

29. Hace 10 años la edad de Juan era inferior a la mitad de la que tiene hoy y dentro de 18 años no superará al doble de la actual, ¿qué años tiene Juan?

Siendo x la edad actual, planteamos el sistema: $\begin{cases} x-10<\dfrac{x}{2} \\ x+18<2x \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \dfrac{x}{2}<10 \\ 18<x \end{cases} \Leftrightarrow 18<x<20$, entonces Juan tiene 19 años pues la soución debe ser natural.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. ¿Es cierto que al despejar x en la inecuación $\dfrac{-x}{4}\geqslant\dfrac{-3}{2}$ resulta $x\leqslant 6$? Si fuera falso pon lo que sería correcto.

No, hay dos cambios de sentido en la desigualdad: $\dfrac{-1}{x}\geqslant\dfrac{-3}{2}$ $\Rightarrow \dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{3}{2} \Rightarrow x \geqslant \dfrac{2}{3}$

2. Resuelve y representa en la recta real la solución de la inecuación $1-2x<x+1$

$1-2x< x+1 \Rightarrow 0<3x \Rightarrow 0< x$

Fig. 5.22.

3. Halla la solución de $x^2 - 4 < 0$

$x^2 - 4 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) < 0$ que se verifica si $x < -2$ o bien $x > 2$

4. Resuelve $\sqrt{1-x} > 2$.

$1 - x > 4 \Rightarrow x < -3$

5. ¿Tiene solución la inecuación $(x+1)^2 < 0$? Razona tu respuesta.

No puesto que $(x+1)^2$ es positivo para cualquier x.

6. ¿Por qué las soluciones de las inecuaciones $\frac{x+1}{x^2+1} \geqslant 1$ y $x + 1 \geqslant 0$ son idénticas?

Porque el denominador $x^2 + 1$ siempre es positivo y eso hace que la solución de $\frac{x+1}{x^2+1} \geqslant 1$ sólo dependa del numerador.

7. La gráfica de la parábola $y = -x^2 + x + 2$ es la mostrada en la figura adjunta. A partir de ella indica las soluciones de:

a) $-x^2 + x + 2 < 0$ **b) $-x^2 + x + 2 \geqslant 0$**

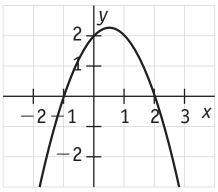

Fig. 5.23.

a) La expresión se verifica en los intervalos abiertos $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
b) El intervalo solución es el cerrado $[-1, 2]$.

8. La gráfica de la recta $3x + 8y = 24$ es la mostrada abajo. Indica las regiones solución de:
a) $3x + 8y = 24$ **b) $3x + 8y < 24$**
c) $3x + 8y > 24$

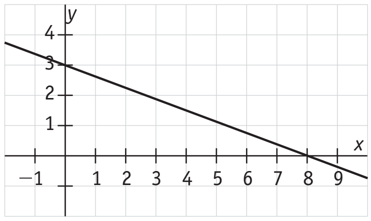

Fig. 5.24.

a) Es la propia recta
b) La región por debajo de la recta (en amarillo)
c) La región superior

9. Formula la inecuación cuya solución es la región sombreada.

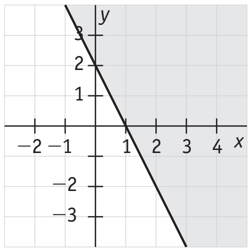

Fig. 5.25.

Como la recta pasa por los puntos (1, 0) y (0, 2), su ecuación es: $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} = 1$ y el área sombreada responde a la inecuación $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} \geqslant 1$ si se incluye la recta.

10. Resuelve y di los intervalos que contienen la solución de $|x+1| \geqslant 1$.

$|x+1| \geqslant 1$ se verifica si $x + 1 \geqslant 1$ o bien $x + 1 \leqslant -1 \Rightarrow x \geqslant 0$ o bien $x \leqslant -2 \Leftrightarrow (-\infty, -2] \cup [0, \infty)$