

1

Los números reales



1. Números racionales e irracionales

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente el volumen de un cubo de arista 2 m y escribe el valor exacto de la arista de un cubo de volumen 2 m^3

Solución:

$$V = 2^3 = 8 \text{ m}^3 \quad a = \sqrt[3]{2} \text{ m}$$

● Aplica la teoría

1. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a) $5/3$ b) π c) $\sqrt{2}$ d) 1,23456...

Solución:

- a) Racional. b) Irracional.
c) Irracional. d) Irracional.

2. Escribe cinco números racionales.

Solución:

$$9, -5, \frac{2}{3}, -\frac{4}{7}, -\frac{1}{8}$$

3. Escribe cinco números irracionales.

Solución:

$$\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt[3]{7}, \pi, e$$

4. Escribe tres números racionales comprendidos entre $1/3$ y $1/2$

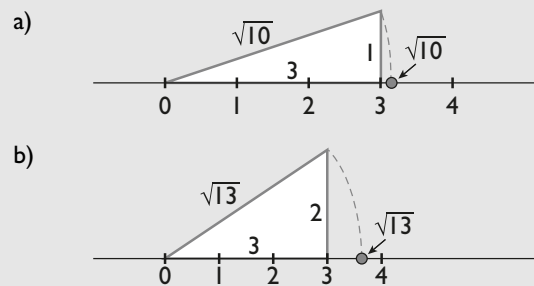
Solución:

$$\frac{5}{12}, \frac{3}{8}, \frac{11}{24}$$

5. Representa gráficamente, de forma exacta:

- a) $\sqrt{10}$ b) $\sqrt{13}$

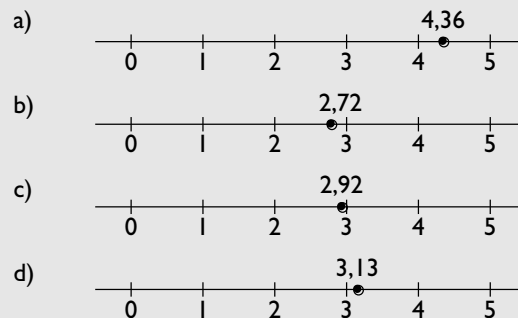
Solución:



6. Representa gráficamente, de forma aproximada:

- a) $\sqrt{19}$ b) e c) $\sqrt[3]{25}$ d) $\sqrt[5]{300}$

Solución:



7. Calcula:

- a) $3 - \frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ b) $\frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$
c) $\frac{4}{3} : \left(\frac{8}{5} - 7\right)$ d) $\frac{4}{3} \left(\frac{5}{6} - 2 + \frac{3}{8}\right)$

Solución:

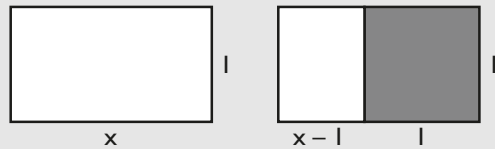
a) 19/6 b) 25/36 c) -20/81 d) -19/18

8. Halla de forma exacta la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm y escribe qué tipo de número es.

Solución: $\sqrt{2}$ cm Es un número irracional.

9. Un rectángulo mide de largo x y de alto 1; por un lado le cortamos un cuadrado de lado 1, y se obtiene un rectángulo semejante.

- a) ¿Cuánto mide x ?
 b) ¿Qué número conocido es x ?
 c) ¿ x es racional o irracional?

Solución:

$$a) \frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

La solución negativa $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ no tiene sentido.

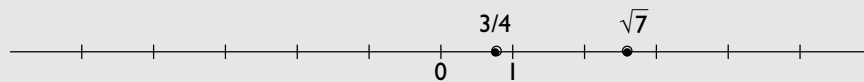
La solución es $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

- b) Es el número áureo de oro.
 c) Es irracional.

2. La recta real

■ Piensa y calcula

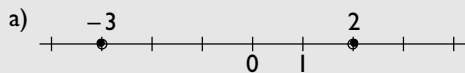
Representa en la recta real, de forma aproximada, los números $\frac{3}{4}$ y $\sqrt{7} = 2,64575131\dots$

Solución:

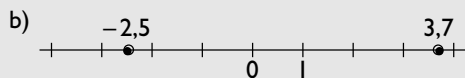
● Aplica la teoría

10. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

- a) -3 y 2 b) -2,5 y 3,7

Solución:

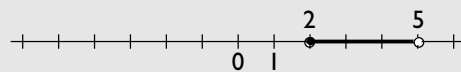
$$d(-3, 2) = |2 - (-3)| = 5$$



$$d(-2,5; 3,7) = |3,7 - (-2,5)| = 6,2$$

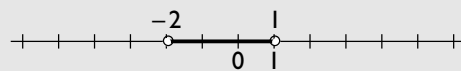
Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x < 5\}$



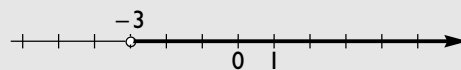
Intervalo semiabierto o semicerrado.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\}$



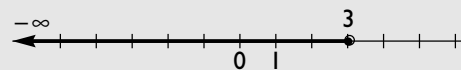
Intervalo abierto.

c) $\{x \in \mathbb{R}; x > -3\}$



Semirecta, intervalo abierto.

d) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 3\}$

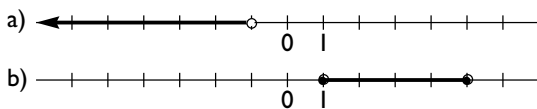


Semirecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

11. Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

- a) $[2, 5)$ b) $(-2, 1)$ c) $(-3, +\infty)$ d) $(-\infty, 3]$

12. Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos:



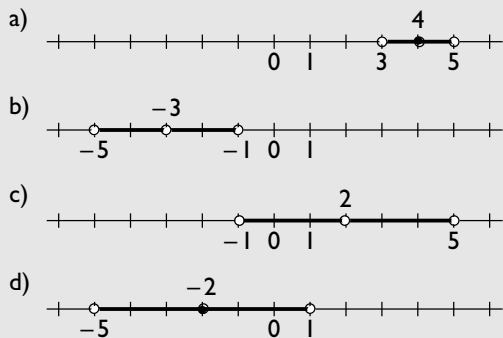
Solución:

- a) $(-\infty, -1]$ b) $[1, 5]$

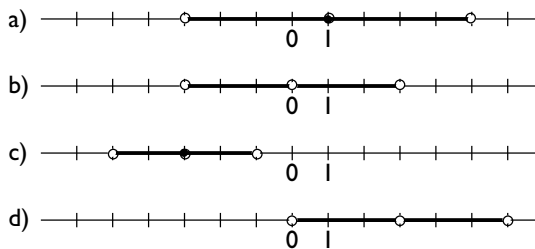
13. Representa gráficamente los siguientes entornos:

- a) $E(4, 1)$ b) $E^*(-3, 2)$ c) $E^*(2, 3)$ d) $E(-2, 3)$

Solución:



14. Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

- a) $E(1, 4)$ b) $E^*(0, 3)$ c) $E(-3, 2)$ d) $E^*(3, 3)$

3. Sucesiones de números reales

■ Piensa y calcula

Escribe tres términos más en las siguientes sucesiones:

- a) 2, 6, 10, 14, ... b) 1, 2, 4, 8, ... c) 3, -3, 3, -3, ... d) 1, 1, 2, 3, 5, ...

Solución:

- a) 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, ... b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... c) 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3, ... d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

● Aplica la teoría

15. Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:

- a) 3, 7, 11, 15, ... b) 5, 10, 20, 40, ...
c) 1, 4, 9, 16, 25, ... d) 1, -3, 5, -7, 9, ...

Solución:

- a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, ...
b) 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, ...
c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...
d) 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15, ...

16. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 2^n$ b) $a_n = 2n + 3$
c) $a_n = (-1)^n (n + 1)$ d) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solución:

- a) 2, 4, 8, 16
b) 5, 7, 9, 11
c) -2, 3, -4, 5
d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$

17. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) 2, 4, 6, 8, 10, ...
 b) 1, 4, 9, 16, 25, ...

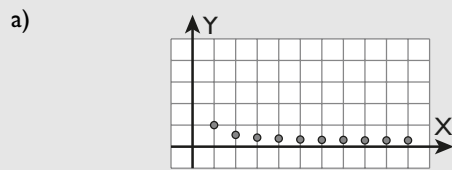
Solución:

- a) $a_n = 2n$ b) $a_n = n^2$

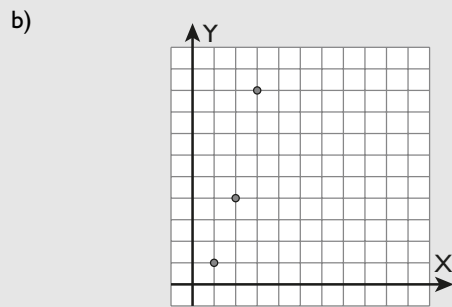
18. Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

- a) $a_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = n^2$
 c) $a_n = \frac{2n + 1}{n}$ d) $a_n = (-1)^n n$

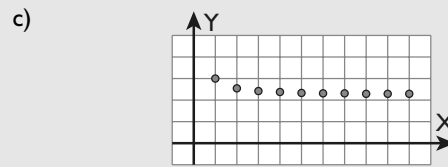
Solución:



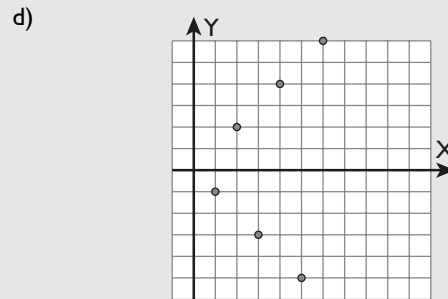
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n} = 2$$



No existe el $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n$

Los valores de la sucesión oscilan de negativo a positivo en cada término haciéndose cada vez más grandes en valor absoluto.

4. Radicales y operaciones

■ Piensa y calcula

Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $\sqrt[3]{8} = x$ b) $\sqrt[4]{x} = 10$ c) $\sqrt[5]{32} = 2$ d) $\sqrt[4]{81} = x$

Solución:

- a) $x = 2$ b) $x = 10000$ c) $x = 5$ d) $x = \pm 3$

● Aplica la teoría

19. Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt[5]{32}$

Solución:

- a) ± 2 b) -5
c) No tiene solución real. d) 2

20. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $7^{3/4}$ b) $5^{-1/4}$ c) $3^{-5/7}$ d) $2^{1/3}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{7^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

21. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[7]{5^2}$ b) $\frac{1}{\sqrt[6]{11^5}}$ c) $\sqrt[5]{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución:

- a) $5^{2/7}$ b) $11^{-5/6}$
c) $3^{1/5}$ d) $2^{-1/3}$

22. Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\sqrt{72}$

Solución:

- a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$
c) $3\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{2}$

23. Suma los siguientes radicales:

- a) $5\sqrt{18} - 3\sqrt{50} + \sqrt{98}$ b) $4\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{625} - 2\sqrt[3]{135}$

Solución:

- a) $7\sqrt{2}$ b) $7\sqrt[3]{5}$

24. Opera los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{64}$
c) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{16}$

Solución:

- a) $2\sqrt[3]{30}$ b) $2\sqrt[5]{16}$
c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[5]{3/4}$

25. Las expresiones que están como potencia pásalas a radical y las que están como radical pásalas a potencia:

- a) $(\sqrt[5]{7})^2$ b) $\sqrt[3]{6^5}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $(\sqrt[7]{5})^2$

Solución:

- a) $\sqrt[5]{7^2}$ b) $(\sqrt[3]{6})^5$
c) $(\sqrt[4]{5})^3$ d) $\sqrt[7]{5^2}$

26. Expresa con un solo radical las siguientes expresiones:

- a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt{2}$
c) $\sqrt[6]{7}$ d) $\sqrt[12]{5}$

27. Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{7}{\sqrt[5]{13^3}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ d) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

Solución:

- a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{7\sqrt[5]{13^2}}{13}$
c) $\frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4}$ d) $7 - 4\sqrt{3}$

28. Halla la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 5 m, 4 m y 3 m

Solución:

$$\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ m}$$

5. Logaritmos

■ Piensa y calcula

Halla el valor de x en los siguientes casos:

- a) $2^3 = x$ b) $x^3 = 125$ c) $2^x = 32$ d) $10^3 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:

- a) $x = 8$ b) $x = 5$ c) $x = 5$ d) $x = 1\,000$ e) $x = 10$ f) $x = 6$

● Aplica la teoría

29. Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $2^6 = x$ b) $x^5 = 32$ c) $2^x = 128$
d) $10^6 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000$

Solución:

- a) $x = 64$ b) $x = 2$
c) $x = 7$ d) $x = 1\,000\,000$
e) $x = 10$ f) $x = 3$

30. Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 32$ b) $\log_3 1$ c) $\log_5 1/25$ d) $\log 100$

Solución:

- a) 5 b) 0
c) -2 d) 2

31. Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 50$ b) $\log_3 36$
c) $\log_5 98,75$ d) $\log 5\,678,24$

Solución:

- a) 5 b) 3
c) 2 d) 3

32. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos:

- a) $\log 725,263$ b) $\log 0,00356$
c) $L 24,6845$ d) $L 0,000765$

Solución:

- a) 2,8605
b) -2,4486
c) 3,2062
d) -7,1756

33. Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

- a) $\log 4$ b) $\log 5$ c) $\log 8$ d) $\log \sqrt{5}$

Solución:

- a) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$
b) $\log 5 = \log 10/2 = 1 - \log 2 = 0,6990$
c) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0,9030$
d) $\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} 0,699 = 0,3495$

34. Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla:

- a) $\log 2,5^{17}$ b) $\log 0,0234^{-25}$
c) $\log \sqrt[5]{87,012}$ d) $\log \sqrt[6]{0,0987}$

Solución:

- a) 6,7650
b) 40,7696
c) 0,3879
d) -0,1676

35. Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log_2 51,27$ b) $\log_3 8,431$
c) $\log_5 0,034$ d) $\log_7 1\,000$

Solución:

- a) 5,6800
b) 1,9406
c) -2,1010
d) 3,5499

Ejercicios y problemas

1. Números racionales e irracionales

36. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{3}{7}$ c) e d) $\sqrt{25}$

Solución:

- a) Irracional. b) Racional.
c) Irracional. d) Racional.

37. Escribe tres números racionales comprendidos entre $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$

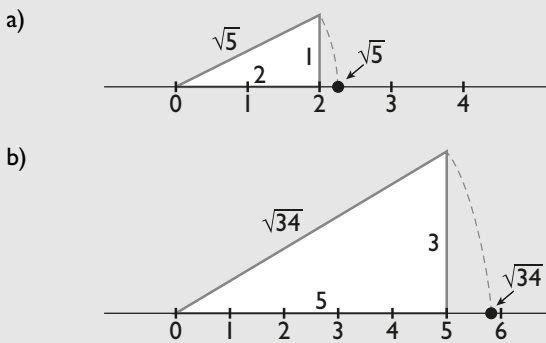
Solución:

$\frac{1}{2}, \frac{9}{20}, \frac{11}{20}$

38. Representa gráficamente de forma exacta:

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt{34}$

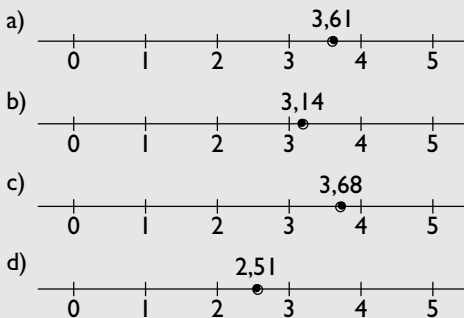
Solución:



39. Representa gráficamente de forma aproximada:

- a) $\sqrt{13}$ b) π
c) $\sqrt[3]{50}$ d) $\sqrt[5]{100}$

Solución:



40. Calcula:

- a) $\frac{3}{8} + 2 - \frac{5}{12}$ b) $\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{6}$
c) $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{6} - 5 + \frac{1}{2}\right)$ d) $\frac{5}{3} \left(\frac{1}{8} - 3 + \frac{13}{6}\right)$

Solución:

- a) $47/24$ b) $-1/24$ c) $-9/52$ d) $-85/72$

41. Halla de forma exacta la arista de un cubo de volumen 5 cm^3 y escribe qué tipo de número es.

Solución:

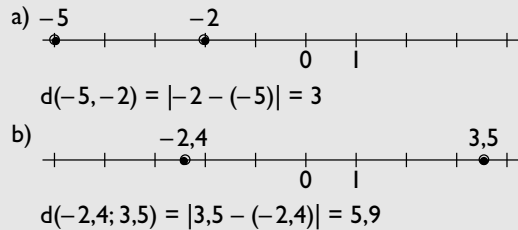
$\sqrt[3]{5} \text{ cm}$ es un número irracional.

2. La recta real

42. Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

- a) -5 y -2 b) $-2,4$ y $3,5$

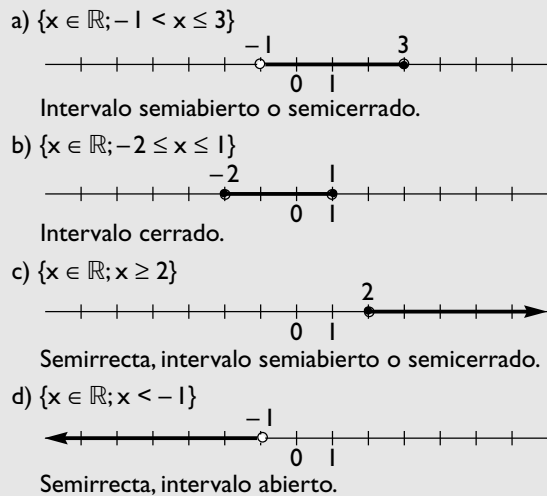
Solución:



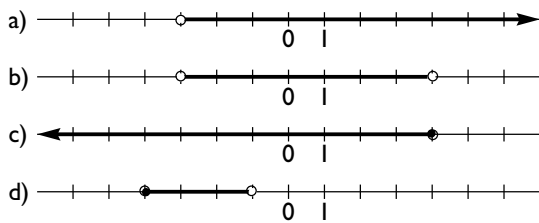
43. Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

- a) $(-1, 3]$ b) $[-2, 1]$
c) $[2, +\infty)$ d) $(-\infty, -1)$

Solución:



44. Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos y clasifícalos:



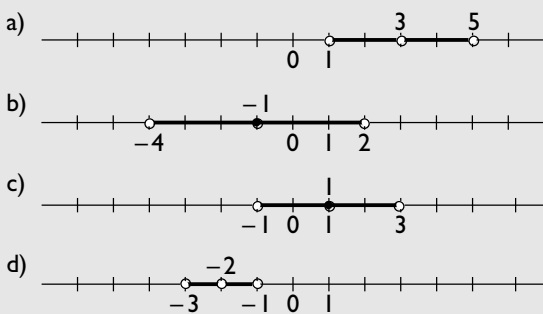
Solución:

- a) $(-3, +\infty)$ semirrecta, intervalo abierto.
- b) $(-3, 4)$ intervalo abierto.
- c) $(-\infty, 4]$ semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.
- d) $[-4, -1)$ intervalo semiabierto o semicerrado.

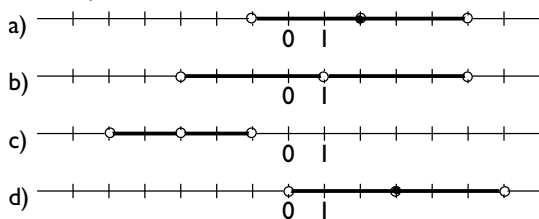
45. Representa gráficamente los siguientes entornos:

- a) $E^*(3, 2)$
- b) $E(-1, 3)$
- c) $E(1, 2)$
- d) $E^*(-2, 1)$

Solución:



46. Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

- a) $E(2, 3)$
- b) $E^*(1, 4)$
- c) $E^*(-3, 2)$
- d) $E(3, 3)$

3. Sucesiones de números reales

47. Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:

- a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$
- b) $5, -7, 9, -11, 13, \dots$
- c) $3, 1, -1, -3, -5, \dots$
- d) $2, 5, 10, 17, \dots$

Solución:

- a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$
- b) $5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19, \dots$
- c) $3, 1, -1, -3, -5, -7, -9, -11, \dots$
- d) $2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \dots$

48. Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 5 + \frac{1}{10^n}$
- b) $a_n = 2n + 1$
- c) $a_n = (-1)^n n(n + 1)$
- d) $a_n = \frac{2n - 3}{n + 1}$

Solución:

- a) $5, 1; 5, 01; 5, 001; 5, 0001; \dots$
- b) $3, 5, 7, 9, \dots$
- c) $-2, 6, -12, 20, \dots$
- d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, \dots$

49. Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$
- b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots$

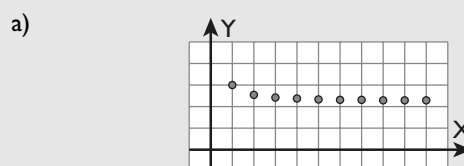
Solución:

- a) $a_n = 2n - 1$
- b) $a_n = \frac{1}{3n - 1}$

50. Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

- a) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$
- b) $a_n = 1 + 2n - \frac{1}{4}n^2$
- c) $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$
- d) $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n}$

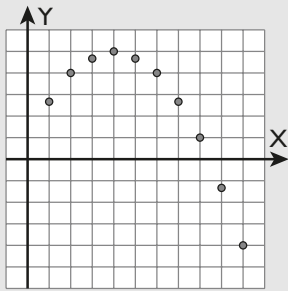
Solución:



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right) = 2$$

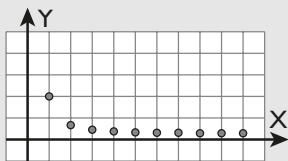
Ejercicios y problemas

b)



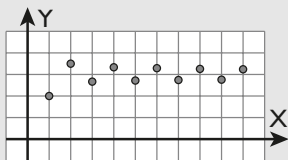
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + 2n - \frac{1}{4}n^2 \right) = -\infty$$

c)



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2} = 0$$

d)



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + (-1)^n \frac{1}{n} \right) = 3$$

4. Radicales y operaciones

51. Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\sqrt[7]{-128}$ d) $\sqrt[5]{243}$

Solución:

- a) ± 5 b) No tiene solución real. c) -2 d) 3

52. Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $5^{-2/3}$ b) $3^{1/5}$ c) $2^{3/4}$ d) $7^{-1/5}$

Solución:

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ b) $\sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[4]{2^3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{7}}$

53. Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{11}}$ c) $\sqrt[3]{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{3^5}}$

Solución:

- a) $7^{3/5}$ b) $11^{-1/4}$ c) $5^{1/3}$ d) $3^{-5/3}$

54. Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{75}$

Solución:

- a) $4\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

55. Suma los siguientes radicales:

- a) $4\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$
b) $5\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{250}$

Solución:

- a) $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{2}$

56. Multiplica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{24}$ b) $\sqrt[6]{16} \cdot \sqrt[6]{128}$

Solución:

- a) $2\sqrt[4]{90}$ b) $2\sqrt[6]{2^4}$

57. Divide los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[5]{40} : \sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt[6]{24} : \sqrt[6]{36}$

Solución:

- a) $\sqrt[5]{8}$ b) $\sqrt[6]{2/3}$

58. Transforma los radicales siguientes. Los que están como potencia pásalos a radical y los que están como radical pásalos a potencia:

- a) $(\sqrt[3]{5})^2$ b) $\sqrt[5]{7^2}$ c) $\sqrt[7]{3^5}$ d) $(\sqrt[11]{13})^5$

Solución:

- a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $(\sqrt[5]{7})^2$ c) $(\sqrt[7]{3})^5$ d) $\sqrt[11]{13^5}$

59. Expresa en forma de un solo radical las siguientes expresiones:

- a) $\sqrt{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{3}$ b) 2 c) $\sqrt[6]{5}$ d) $\sqrt[12]{7}$

60. Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[3]{5^2}}$
c) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ d) $\frac{5+\sqrt{2}}{5-\sqrt{2}}$

Solución:

- a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{3\sqrt[3]{5^5}}{5}$ c) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ d) $\frac{27+10\sqrt{2}}{23}$

5. Logaritmos

61. Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $3^3 = x$ b) $x^3 = 125$ c) $3^x = 81$
 d) $10^3 = x$ e) $x^2 = 100$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:

- a) $x = 27$ b) $x = 5$ c) $x = 4$
 d) $x = 1\,000$ e) $x = \pm 10$ f) $x = 6$

62. Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 1$ b) $\log_3 \frac{1}{9}$ c) $\log_5 25$ d) $\log 0,0001$

Solución:

- a) 0 b) -2 c) 2 d) -4

63. Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 27$ b) $\log_3 52,6$
 c) $\log_5 18,27$ d) $\log 78,24$

Solución:

- a) 4 b) 3 c) 1 d) 1

64. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log 86,233$ b) $\log 0,0874$
 c) $\log 765,023$ d) $\log 0,01234$

Solución:

- a) 1,9357 b) -1,0585
 c) 6,6399 d) -4,3949

65. Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log 5,7^{12}$ b) $\log 0,567^{-15}$
 c) $\log \sqrt[4]{345,98}$ d) $\log \sqrt[7]{0,00345}$

Solución:

- a) 9,0705 b) 3,6963
 c) 0,6348 d) -0,3517

66. Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log_2 7,3456$ b) $\log_3 45,987$
 c) $\log_5 0,3054$ d) $\log_7 0,056712$

Solución:

- a) 2,8769 b) 3,4847
 c) -0,7370 d) -1,4748

Para ampliar

67. ¿Qué números enteros tienen inverso entero?

Solución:

El 1 y el -1; cada uno es inverso de sí mismo.

68. Halla el opuesto y el inverso de:

- a) $\frac{2}{3}$ b) -5

Solución:

- a) El opuesto es $-\frac{2}{3}$ y el inverso es $\frac{3}{2}$
 b) El opuesto es 5 y el inverso es $-\frac{1}{5}$

69. Clasifica los siguientes números como racionales o irracionales:

- a) $5 - \sqrt{3}$ b) $\frac{3}{7} - \frac{3}{5}$ c) $\pi + e$ d) $\sqrt[3]{-64}$

Solución:

- a) Irracional. b) Racional.
 c) Irracional. d) Racional.

70. Escribe en forma de intervalo las siguientes desigualdades:

- a) $2 \leq x \leq 5$ b) $x > 3$ c) $-3 < x \leq 2$ d) $x < 4$

Solución:

- a) $[2, 5]$ b) $(3, +\infty)$
 c) $(-3, 2]$ d) $(-\infty, 4)$

71. Escribe en forma de entorno las siguientes desigualdades:

- a) $|x - 2| < 3$ b) $|x| < 2,5$
 c) $|x + 3| < 2$ d) $|x + 1| < 3,2$

Solución:

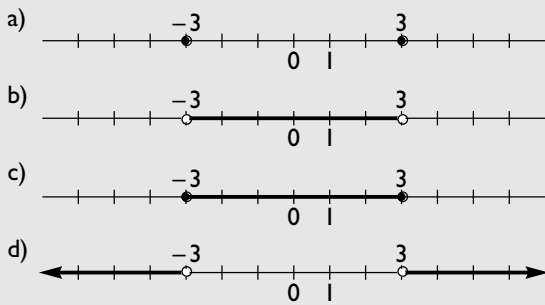
- a) $E(2, 3)$ b) $E(0; 2,5)$
 c) $E(-3, 2)$ d) $E(-1; 3,2)$

72. Representa gráficamente los conjuntos dados por las siguientes expresiones:

- a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| \leq 3$ d) $|x| > 3$

Ejercicios y problemas

Solución:



73. Suma los siguientes radicales:

- a) $3a\sqrt{8a^3} - 5\sqrt{18a^5} + 7a\sqrt{50a^3}$
 b) $7\sqrt[3]{16x^8} + 5\sqrt[3]{54x^5} - 2\sqrt[3]{128x^2}$

Solución:

- a) $26a^2\sqrt{2a}$ b) $(14x^2 + 15x - 8)\sqrt[3]{2x^2}$

74. Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ d) $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$

Solución:

- a) \sqrt{a} b) $\frac{b\sqrt[3]{a^5}}{a}$ c) $\frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}$ d) $\frac{a^2+2a\sqrt{b}+b}{a^2-b}$

75. Calcula, aplicando la fórmula de cambio de base, los siguientes logaritmos y redondea el resultado a cuatro decimales:

- a) $\log_{1/2} 15,87$ b) $\log_{1/3} 345,769$
 c) $\log_{1/5} 0,0006$ d) $\log_{0,1} 0,005439$

Solución:

- a) -3,9882 b) -5,3211 c) 4,6094 d) 2,2645

Con calculadora

76. Halla con la calculadora el valor de los siguientes números redondeando a 5 cifras:

- a) π b) e c) $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d) $\sqrt[3]{5}$

Solución:

- a) 3,14159 b) 2,71828 c) 1,61803 d) 1,25850

77. Halla el valor de los siguientes resultados y redondea el resultado a cinco decimales:

- a) $1,000001^{1\,000\,000}$ b) $0,9999991\,000\,000$

Solución:

- a) 2,71828 b) 0,36788

78. Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos; redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log \pi$ b) $\log e$ c) $L \pi$ d) $L 10$

Solución:

- a) 0,4971 b) 0,4343 c) 1,1447 d) 2,3026

79. Utilizando la calculadora, halla:

- a) π^π b) e^e c) π^e d) e^π

Solución:

- a) 36,4622 b) 15,1543 c) 22,4592 d) 23,1407

Problemas

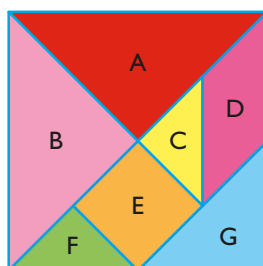
80. Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de diámetro l m. ¿Qué clase de número es?

Solución:

$$L = \pi m$$

Es un número irracional.

81. La siguiente figura se conoce con el nombre de tangram chino. Si el lado del cuadrado mide l m, halla el área de cada una de las figuras que lo componen.



Solución:

$$A = B = 1/4 m^2$$

$$C = F = 1/16 m^2$$

$$D = E = G = 1/8 m^2$$

82. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número π

Solución:

(3, 4)

83. La longitud de una finca rectangular es 15 m y el perímetro es inferior a 50 m. ¿Qué valores puede tomar el ancho de la finca?

Solución:

$$2x + 30 \leq 50 \Rightarrow 0 < x \leq 10$$

84. Calcula las siguientes potencias redondeando los resultados a cinco decimales. ¿A qué número real muy conocido se aproximan los valores que se van obteniendo?

- a) $1,1^{10}$ b) $1,01^{100}$
 c) $1,001^{1000}$ d) $1,0001^{10000}$
 e) $1,00001^{100000}$ f) $1,000001^{1000000}$

Solución:

- a) 2,59374 b) 2,70481 c) 2,71692
 d) 2,71815 e) 2,71827 f) 2,71828

Se aproximan hacia el número e

85. Halla la fórmula del área de un triángulo equilátero cuyo lado mide **a** cm

Solución:

$$\text{Área} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

86. Halla la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide **x** m

Solución:

$$d = x\sqrt{2} \text{ m}$$

87. Demuestra que el producto de dos números irracionales no es siempre irracional, resolviendo el siguiente contraejemplo: halla un número irracional que al multiplicarlo por el número irracional $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ sea racional.

Solución:

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$$

88. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\log 525$

Solución:

$$(2, 3)$$

89. De dos números se sabe que $\log x + \log y = 0$. ¿Qué relación hay entre **x** e **y**?

Solución:

$$\log xy = \log 1$$

$$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Es decir, son inversos.

90. Sabiendo que $\log 5 = 0,6990$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 2$

b) $\log 25$

c) $\log 4$

d) $\log \sqrt{5}$

Solución:

a) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = 1 - \log 5 = 0,3010$

b) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 1,3980$

c) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$

d) $\log \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2} = 0,3495$

91. Una célula se reproduce por bipartición cada hora. ¿Cuántos días tardará en sobrepasar el billón?

Solución:

$$2^x = 10^{12}$$

$$x \log 2 = 12$$

$$x = \frac{12}{\log 2} = 39,86$$

Tardará casi 2 días.

92. Un coche deportivo cuesta 70 000 € y se devalúa cada año un 15 %. ¿Cuántos años tardará en valer menos de 10 000 €?

Solución:

$$70\,000 \cdot 0,85^x = 10\,000$$

$$7 \cdot 0,85^x = 1$$

$$\log 7 + x \log 0,85 = 0$$

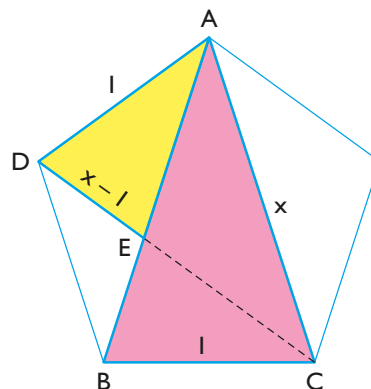
$$x \log 0,85 = -\log 7$$

$$x = -\frac{\log 7}{\log 0,85} = 11,97$$

Tardará casi 12 años.

Para profundizar

93. Sabiendo que los triángulos ABC y ADE son semejantes, calcula el valor de **x**. ¿Qué número conocido es **x**? ¿Es racional o irracional?



Ejercicios y problemas

Solución:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solución negativa $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ no sirve.

La solución es $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Es el número áureo o de oro.

Es irracional.

94. Los números racionales son densos. Veamos dos formas de demostrarlo:

a) Halla la media aritmética entre $2/3$ y $4/5$, comprueba que es racional y que está en el intervalo $(2/3, 4/5)$

b) Halla el número que se obtiene al sumar entre sí los numeradores y los denominadores de $2/3$ y $4/5$, comprueba que es racional y que está en el intervalo $(2/3, 4/5)$

Solución:

a) $2/3 = 0,6666666666$	b) $2/3 = 0,6666666666$
$11/15 = 0,7333333333$	$6/8 = 3/4 = 0,75$
$4/5 = 0,8$	$4/5 = 0,8$

95. Escribe el menor intervalo cerrado, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número e

Solución:

$[2, 3]$

96. Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número áureo, o de oro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Solución:

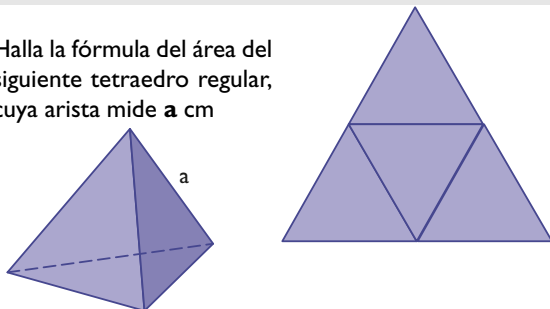
$(1, 2)$

97. La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ kg, y la del Sol, $1,98 \cdot 10^{30}$ kg. ¿Cuántas veces es mayor la masa del Sol que la de la Tierra?

Solución:

$$1,98 \cdot 10^{30} : (5,98 \cdot 10^{24}) = 331\ 103,68 \text{ veces}$$

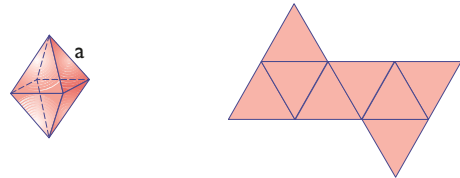
98. Halla la fórmula del área del siguiente tetraedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = a^2\sqrt{3}$$

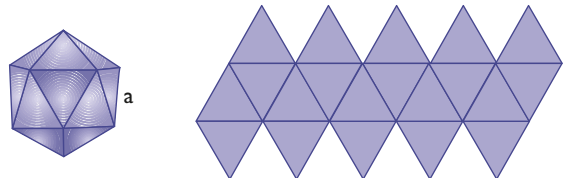
99. Halla la fórmula del área del siguiente octaedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = 2a^2\sqrt{3}$$

100. Halla la fórmula del área del siguiente icosaedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = 5a^2\sqrt{3}$$

101. Halla el volumen de un tetraedro cuya arista mide a cm

Solución:

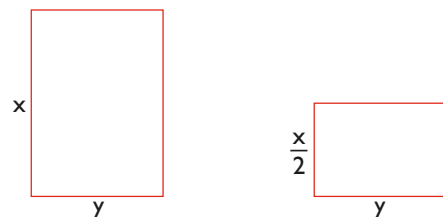
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

102. Halla el volumen de un octaedro cuya arista mide a cm

Solución:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

103. Un papel A0 mide 1 m^2 , y cuando se corta a la mitad da origen a un A1 que tiene la particularidad de que es semejante al anterior.

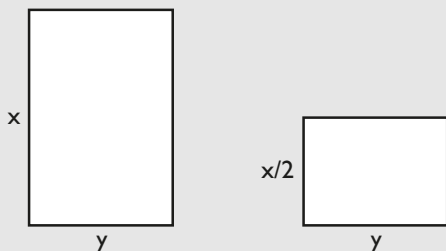


a) Calcula de forma exacta la longitud y la anchura de un papel de formato A0

b) Un A2 es la mitad de un A1, un A3 es la mitad de un A2, y un A4 es la mitad de un A3. Calcula de forma aproximada hasta los milímetros las dimensiones de un A4 (el A4 es el sustituto del folio, por la semejanza entre todos los A...; esta semejanza permite hacer fotocopias reduciendo o ampliando y manteniendo las proporciones del texto y/o dibujo y los márgenes).

Solución:

a)



$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x/2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = y^2$$

Además: $xy = 1 \Rightarrow y = 1/x$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2$$

$$x = \sqrt[4]{2}, y = 1/\sqrt[4]{2}$$

b) 297 mm × 210 mm

104. Sabiendo que $\log 3 = 0,4771$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 30$

b) $\log 900$

c) $\log \sqrt{1/3}$

d) $\log \sqrt[5]{270}$

Solución:

a) $\log 30 = \log 3 \cdot 10 = \log 3 + \log 10 = 1,4771$

b) $\log 900 = \log 3^2 \cdot 100 = 2 \log 3 + \log 100 = 2,9542$

c) $\log \sqrt{1/3} = -\frac{\log 3}{2} = -0,2386$

d) $\log \sqrt[5]{270} = \frac{\log (3^3 \cdot 10)}{5} = \frac{3 \log 3 + \log 10}{5} = 0,4863$

105. Sabiendo que $\log 45 = 1,6532$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 4,5$

b) $\log 450$

c) $\log \sqrt{45}$

d) $\log \sqrt[3]{4500}$

Solución:

a) $\log 4,5 = 0,6532$

b) $\log 450 = 2,6532$

c) $\log \sqrt{45} = 0,8266$

d) $\log \sqrt[3]{4500} = \frac{3,6532}{3} = 1,2177$