Actividades

1. Dado el número complejo $z = 1 - 2i$ se pide:
a) ¿qué valor ha de tener x para que $3x - 2i = z$?
b) Calcula el opuesto de su conjugado.
c) Calcula el conjugado de su opuesto.

a) $3x - 2i = 1 - 2i \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

b) El conjugado de $z = 1 - 2i$ es $\bar{z} = 1 + 2i$ y su opuesto $-\bar{z} = -1 - 2i$.

c) Su opuesto es $-z = -1 + 2i$; el conjugado de este, $\overline{-z} = -1 - 2i$.

2. Efectúa $\dfrac{3\cdot i^{770} + i^{2043}}{1 + i^{4153}}$.

Como $770 = 4 \cdot 192 + 2; 2\,043 = 4 \cdot 510 + 3$ y $4\,153 = 4 \cdot 1\,038 + 1$, se tiene que $\dfrac{3\cdot i^{770} + i^{2043}}{1 + i^{4153}} = \dfrac{3\cdot i^2 + i^3}{1+i} = \dfrac{-3-i}{1+i} = -2 + i$

3. Expresa el número $2(\cos 30^\circ - i\operatorname{sen} 30^\circ)$ en forma polar y binómica.

$2(\cos 30^\circ - i\operatorname{sen} 30^\circ) = 2[\cos(-30^\circ) + i\operatorname{sen}(-30^\circ)] =$
$= 2\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right] = \sqrt{3} - i$ que es su forma binómica.

La forma polar será 2_{-30° ó 2_{330°.

4. Teniendo en cuenta que $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ} = 1_{15^\circ}$ calcula sen 15° y cos 15°.

Por una parte se tiene que $\dfrac{1_{45^\circ}}{1_{30}} = 1_{15^\circ} = 1(\cos 15^\circ + i\operatorname{sen} 15^\circ) = \cos 15^\circ + i\operatorname{sen} 15^\circ$.

Por otra parte, $\dfrac{1_{45^\circ}}{1_{30}} = \dfrac{1(\cos 45^\circ + i\operatorname{sen} 45^\circ)}{1(\cos 30^\circ + i\operatorname{sen} 30^\circ)} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} =$

$= \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$

Igualando partes real e imaginaria de ambas expresiones se obtiene:

$\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5. Calcula y representa gráficamente las soluciones de la ecuación $z^3 + 2 - 2i = 0$.

Las soluciones de la ecuación $z^3 + 2 - 2i = 0$ son $z = \sqrt[3]{-2+2i}$. Para calcular esta raíz cúbica, expresamos el radicando en forma polar; $-2 + 2i$ tiene por módulo $m = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ y por argumento $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{-2} = 135^\circ$ pues está situado en el segundo cuadrante.

Por tanto,

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{(\sqrt{8})_{135^\circ}} = (\sqrt[6]{8})_{\frac{135^\circ + k\cdot 360^\circ}{3}} = (\sqrt{2})_{45^\circ + k\cdot 120^\circ} =$$

$$= \begin{cases} (\sqrt{2})_{45^\circ} \\ (\sqrt{2})_{165^\circ} \\ (\sqrt{2})_{285^\circ} \end{cases}$$

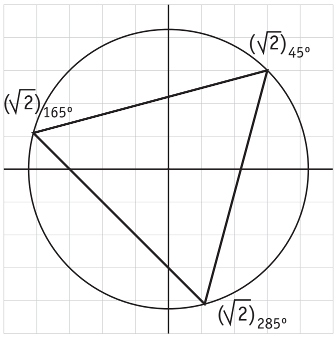

Fig. 9.1.

Los afijos de estas raíces están situadas sobre una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ y son los vértices de un triángulo equilátero.

6. Encuentra la ecuación que tiene por raíz a los números $z_1 = 1$, $z_2 = 1 - 3i$, $z_3 = -1$ y $z_4 = 1 + 3i$.

La ecuación buscada será

$(z-1)\cdot(z+1)\cdot[z-(1-3i)]\cdot[z-(1+3i)] = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (z^2-1)\cdot(z^2-2z+10) = 0 \Leftrightarrow z^4 - 2z^3 + 9z^2 + 2z - 10 = 0$

Problemas propuestos

Tipo I. Partes real e imaginaria del número complejo. Representación gráfica

1. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:
a) $2 + 3i$ **b) $-1 + i$**
c) $-2 - 2i$ **d) $4 - 3i$**

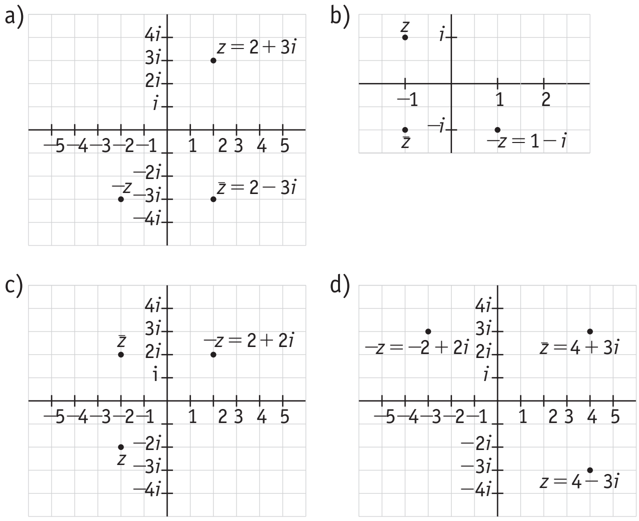

Fig. 9.2.

2. Representa gráficamente los números complejos $z = x + yi$ tales que:
a) Su parte real sea -2.
b) Su parte imaginaria sea 3.
c) $2 < y \leqslant 2$
d) $0 \leqslant x \leqslant 3$
e) $|z| \leqslant 2$

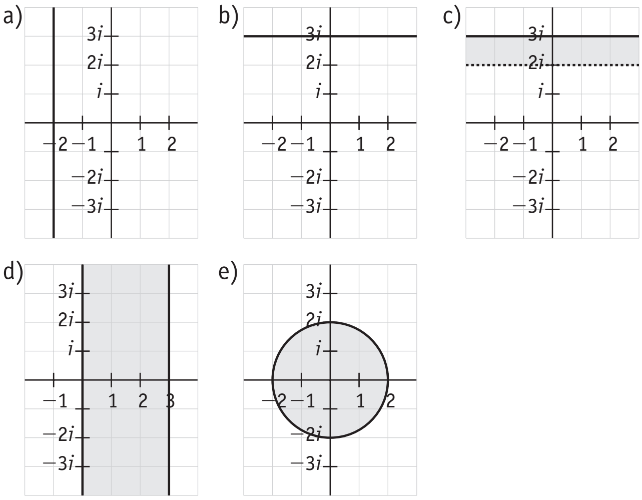

Fig. 9.3.

a) Son los números situados sobre la recta vertical $x = -2$.
b) Son los números situados sobre la recta horizontal $y = 3$.
c) Son los números comprendidos entre las rectas $y = 2$ e $y = 3$ (los situados sobre la segunda recta pertenecen, no así los de la primera).
d) Son los números comprendidos entre las rectas $x = 0$ y $x = 3$ (los situados sobre ambas rectas pertenecen).
e) Son los números de la circunferencia centrada en el origen de radio 2 y los del interior de dicha circunferencia.

3. Representa gráficamente los números complejos que:
a) tienen módulo 3,
b) tienen argumento 180°,
c) tienen argumento 45°,
d) satisfacen la ecuación $x^2 + 9 = 0$.

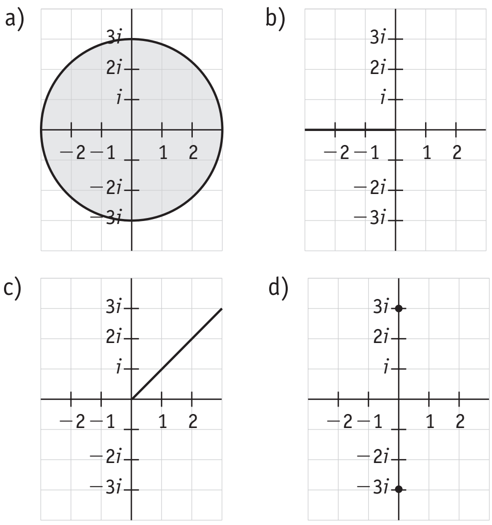

Fig. 9.4.

a) Son los números cuyos afijos están sobre la circunferencia centrada en el origen y radio 3.
b) Son los números cuyos afijos están situados en la parte negativa del eje real.
c) Son los números cuyos afijos están situados sobre la bisectriz del primer cuadrante.
d) Son los números $z = 3i$ y $z' = -3i$.

4. Representa gráficamente los números complejos que verifican la ecuación:
a) $z - \bar{z} = 4i$ b) $z + \bar{z} = 2$ c) $z \cdot \bar{z} = 5$

Si $z = x + yi$ será $\bar{z} = x - yi$. Luego:
a) La ecuación $z - \bar{z} = 4i$ es equivalente a $2yi = 4i \Rightarrow y = 2$. La parte real x puede ser cualquier número, luego $z = x + 2i$.
b) $z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$. Es decir, $z = 1 + yi$.
c) $z \cdot \bar{z} = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$. La solución son los números situados sobre la circunferencia centrada en el origen y de radio $\sqrt{5}$.

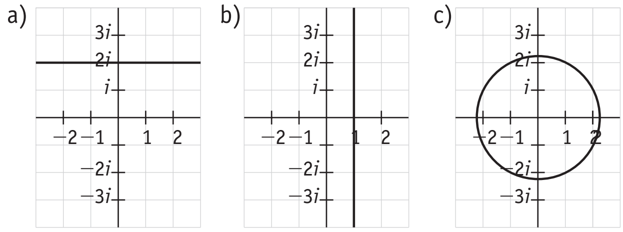

Fig. 9.5.

5. Indica qué condición (o condiciones) cumplen los números complejos $z = x + yi$ cuya representación gráfica se muestra:

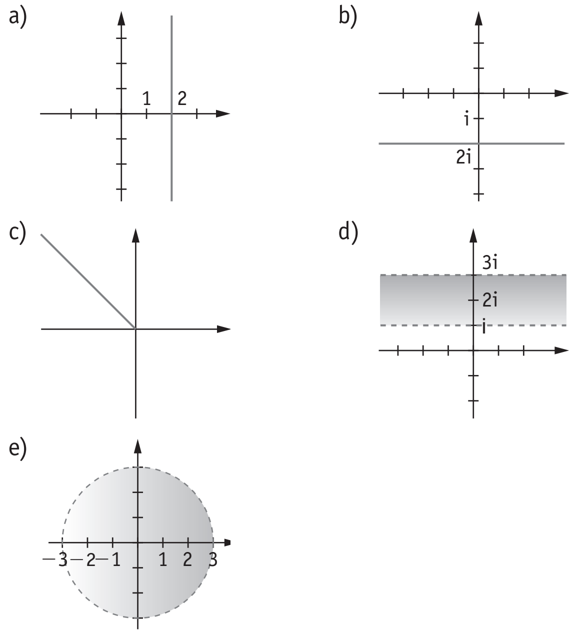

Fig. 9.6.

a) $x = 2$.
b) $y = -2$.
c) Su argumento es 135°.
d) $1 < y \leqslant 3$
e) $x^2 + y^2 \leqslant 9 \Leftrightarrow |z| \leqslant 3$

6. **Completa la tabla:**

z	$-z$	$\bar{z}=$	$1/z$
2 − 3i			
	$-1+4i$		
		3 − 3i	
			i

z	$-z$	$\bar{z}=$	$1/z$
$2-3i$	$-2+3i$	$2+3i$	$\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$
$1-4i$	$-1+4i$	$1+4i$	$\frac{1}{17}+\frac{4}{17}i$
$3+3i$	$-3-3i$	$3-3i$	$\frac{1}{6}-\frac{1}{6}i$
$-i$	i	i	i

7. **a) ¿Qué relación existe entre el conjugado del opuesto de un número complejo, $z=a+bi$, y el opuesto del con jugado del mismo número? Razone la respuesta.**
b) Calcule los números x e y de modo que $\frac{3-xi}{1+2i}=y+2i$.

a) Si $z=a+bi$, su opuesto es $-z=-a-bi$. Y el conjugado de su opuesto es $\overline{-z}=-a+bi$.
Por otra parte, el conjugado de z es $\bar{z}=a+bi$; y el opuesto del conjugado $-\bar{z}=-a+bi$. Luego $\overline{-z}=-\bar{z}$, es decir, los dos números del enunciado son iguales.

b) $\frac{3-xi}{1+2i}=\frac{(3-xi)\cdot(1-2i)}{(1+2i)\cdot(1-2i)}=\frac{3-2x}{5}+\frac{-6-x}{5}i.$

Como dos números complejos son iguales si lo son sus partes real e imaginaria ha de ser:

$$\begin{cases}\frac{3-2x}{5}=y\\ \frac{-6-x}{5}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-16\\ y=7\end{cases}.$$

8. **Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número imaginario puro:**

a) $(8-3i)(1+ki)$ b) $(k+\sqrt{2}i)^2$ c) $\frac{k-2i}{8+2i}$

a) $(2-3i)(1+ki)=(2+3k)+(2k-3)i\Rightarrow$
$\Rightarrow 2+3k=0\Leftrightarrow k=-\frac{2}{3}$

b) $(k+\sqrt{2}i)^2=(k^2-2)+2k\sqrt{2}i\Rightarrow k^2-2=0\Leftrightarrow k=\pm\sqrt{2}$

c) $\frac{k-2i}{8+2i}=\frac{8k-4}{68}-\frac{2k+16}{68}i\Rightarrow\frac{8k-4}{68}=0\Leftrightarrow k=\frac{1}{2}$

9. **Calcula en cada caso el valor que ha de tener k para que el resultado de la operación correspondiente sea un número real:**

a) $(3+ki)(6-3i)$ b) $\frac{k-2i}{5-6i}$ c) $\frac{1+i}{k+2i}$

a) $(3+ki)(6-3i)=(18+3k)+(6k-9)i\Rightarrow$
$\Rightarrow 6k-9=0\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$

b) $\frac{k-2i}{5-6i}=\frac{5k+12}{61}+\frac{6k-10}{61}i\Rightarrow\frac{6k-10}{61}=0\Leftrightarrow k=\frac{5}{3}$

c) $\frac{1+i}{k+2i}=\frac{k+2}{k^2+4}+\frac{k-2}{k^2+4}i\Rightarrow\frac{k-2}{k^2+4}=0\Leftrightarrow k=2$

10. **Determina k para que el número $(2-ki)^2$ sea:**
a) un número real,
b) un número imaginario puro.

Como $(2-ki)^2=(4-k^2)-4ki$, se tiene:
a) para que sea un número real $\Rightarrow -4k=0\Leftrightarrow k=0$,
b) para que sea un número imaginario puro $\Rightarrow 4-k^2=0\Leftrightarrow k=\pm 2$.

11. **Determina el valor de k para el número $\frac{3-2ki}{4-3i}$**
a) sea un número real.
b) sea un número imaginario puro.
c) tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante.

Como $\frac{3-2ki}{4-3i}=\frac{12+6k}{25}+\frac{9-8k}{25}i$ se tiene que:

a) para que sea un número real:
$\frac{9-8k}{25}=0\Rightarrow 9-8k=0\Leftrightarrow k=\frac{9}{8}$

b) para que sea un número imaginario puro:
$\frac{12+6k}{25}=0\Rightarrow 12+6k=0\Leftrightarrow k=-2$

c) para que tenga su afijo en la bisectriz del primer cuadrante:
$\frac{12+6k}{25}=\frac{9-8k}{25}\Rightarrow k=-\frac{3}{14}$

12. **Determina el valor de a y b para el número $\frac{a-3i}{4+bi}$ sea igual a $(\sqrt{2})_{135^\circ}$.**

Como $(\sqrt{2})_{135^\circ}=-1+i$, la relación
$\frac{a-3i}{4+bi}=(\sqrt{2})_{135^\circ}\Rightarrow a-3i=(4+bi)\cdot(-1+i)=$

$=(-4-b)+(4-b)i\Rightarrow\begin{cases}a=-4-b\\ -3=4-b\end{cases}$, es decir $a=-11$, $b=7$

13. **Determina el valor de a para que el módulo del número $\frac{a+i}{3+i}$ sea $\sqrt{5}$.**

$\frac{a+i}{3+i}=\frac{3a+1}{10}+\frac{3-a}{10}i.$

Su módulo es $m=\sqrt{\left(\frac{3a+1}{10}\right)^2+\left(\frac{3-a}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+1}{10}}.$

Si ha de ser $m=\sqrt{5}$, será $\frac{a^2+1}{10}=5\Rightarrow a^2=49$, es decir $a=\pm 7$.

14. **Determina el valor de k para que el módulo del número $\frac{3+ai}{1+ai}$ sea $\sqrt{3}$.**

$\frac{3+ai}{1+ai}=\frac{a^2+3}{a^2+1}-\frac{2a}{a^2+1}i.$

Su módulo es $m=\sqrt{\left(\frac{a^2+3}{a^2+1}\right)^2+\left(-\frac{2a}{a^2+1}\right)^2}=\sqrt{\frac{a^4+10a^2+9}{a^4+2a^2+1}}.$

Si queremos que valga $\sqrt{3}$, será $\sqrt{\frac{a^4+10a^2+9}{a^4+2a^2+1}}=\sqrt{3}$, es decir

$\frac{a^4+10a^2+9}{a^4+2a^2+1}=3 \Rightarrow a^4-2a^2-3=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2=3 \\ a^2=-1. \end{cases}$

La última posibilidad es imposible, luego $a=\pm\sqrt{3}$.

Tipo II. Formas de un número complejo. Operaciones

15. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\left(-\frac{5}{3}-i\right)+\left(1+\frac{3}{2}i\right)$

b) $\left(-\frac{1}{4}-6i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}i\right)$

c) $(2-i)\cdot\left(\frac{5}{2}+3i\right)$

d) $(3-i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$

e) $(-2i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)$

f) $(3-2i)(3+2i)$

a) $\left(-\frac{5}{3}-i\right)+\left(1+\frac{3}{2}i\right)=-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i$

b) $\left(-\frac{1}{4}-6i\right)-\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{2}i\right)=1-\frac{15}{2}i$

c) $(2-i)\cdot\left(\frac{5}{2}+3i\right)=8+\frac{7}{2}i$

d) $(3-i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)=\frac{9}{2}+\frac{7}{2}i$

e) $(-2i)\cdot\left(1+\frac{3}{2}i\right)=3-2i$

f) 13

16. Calcula:

a) $i^{10}+i^{141}+i^{15}$ **b)** $(3-2i)^2$

c) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2$ **d)** $(-1+2i)^6$

a) $i^{10}+i^{141}+i^{15}=i^2+i^1+i^3=-1+i-i=-1$

b) $(3-2i)^2=5-12i$

c) $\left(1+\frac{3}{2}i\right)^2=-\frac{5}{4}+3i$

d) Utilizando el binomio de Newton, $(-1+2i)^6=117-4i$.

17. Dados $z_1=3-2i$, $z_2=-3+i$ y $z_3=5i$, calcula:

a) $z_1+z_2+z_3$ **b)** $z_1+2z_2-z_3$

c) $z_1(z_2+z_3)+z_3$ **d)** $\frac{z_2-z_1}{z_3}$

e) $(z_1+2z_3)(z_2-z_1)$

a) $z_1+z_2+z_3=4i$

b) $z_1+2z_2-z_3=-3-5i$

c) $z_1(z_2+z_3)+z_3=3+29i$

d) $\frac{z_2-z_1}{z_3}=\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$

e) $(z_1+2z_3)(z_2-z_1)=-42-39i$

18. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8$ **b)** $(2\sqrt{3}-2i)^5$

c) $\frac{2}{3-i}$ **d)** $\frac{1+i}{1-i}$

e) $\frac{(4-i)^2(3+i)}{2-i}$ **f)** $\frac{2-i}{2+i}-(1-3i)^2$

g) $\frac{5+i}{3-i}\cdot\frac{1+i}{2i}$ **h)** $\frac{(1-2i)^2}{3+i}+\frac{5-2i}{1+i}$

j) $\frac{3+3i}{1-3i}-\frac{1}{2+i}$

a) El número $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ en polares es 1_{45°.

Luego $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^8=(1_{45^\circ})^8=1_{360^\circ}=1.$

b) En polares $2\sqrt{3}-2i=4_{330^\circ}$.

Luego $(2\sqrt{3}-2i)^5=(4_{330^\circ})^5=(4^5)_{5\cdot 330^\circ}=1024_{1650^\circ}=$
$=1024_{210^\circ}=1024\ (\cos 210^\circ+i \text{ sen } 210^\circ)=$
$=1024=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-512\sqrt{3}-512i$

c) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$ d) i e) $23+7i$

f) $\frac{43}{5}+\frac{26}{5}i$ g) $\frac{11}{10}-\frac{3}{10}i$ h) $\frac{1}{5}-\frac{22}{5}i$

j) $-1+\frac{7}{5}i$

19. Expresa en forma binómica:

a) $2(\cos 135^\circ+i\text{sen } 135^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ+i\text{sen } 45^\circ)$

b) $\frac{4(\cos 240^\circ+i \text{ sen } 240^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 30^\circ+i \text{ sen } 30^\circ)}$

c) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\text{sen}\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

d) $[2(\cos 30^\circ+i\text{sen } 30^\circ)]^5$

a) $2(\cos 135^\circ+i\text{sen } 135^\circ)\cdot 3(\cos 45^\circ+i\text{sen } 45^\circ)=$
$=2_{135^\circ}\cdot 3_{45^\circ}=6_{180^\circ}=-6.$

b) $\dfrac{4(\cos 240° + i \text{ sen } 240°)}{\frac{1}{2}(\cos 30° + i \text{ sen } 30°)} = \dfrac{4_{240°}}{\left(\frac{1}{2}\right)_{30°}} = 8_{210°} =$

$= 8\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) = -4\sqrt{3} - 4i$

c) $2\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\text{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)\cdot\dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right) =$

$= 2_{\frac{5\pi}{6}}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)_{\frac{\pi}{3}} = \left(\dfrac12\right)_{\frac{7\pi}{6}} = \dfrac12\left(-\dfrac{\sqrt3}{3} - \dfrac12 i\right) =$

$= -\dfrac{\sqrt3}{4} - \dfrac14 i$

d) $[2(\cos 30° + i\text{sen } 30°)]^5 = (2_{30°})^5 = 32_{150°} =$

$= 32\left(-\dfrac{\sqrt3}{2}+\dfrac12 i\right) = -16\sqrt3 + 16i$

20. Realiza las siguientes operaciones y expresa el resultado en forma binómica:

a) $2_{210°}\cdot\left(\frac14\right)_{60°}$ **b)** $\left(\frac13\right)_{150°} : 3_{30°}$ **c)** $(\sqrt2)_{\frac{\pi}{3}}\cdot 2_{\frac{4\pi}{3}}$

a) $2_{210°}\cdot\left(\dfrac14\right)_{60°} = \left(\dfrac12\right)_{270°} = -\dfrac12 i$

b) $\left(\dfrac13\right)_{150°} : 3_{30°} = \left(\dfrac19\right)_{120°} = \dfrac19\left(-\dfrac12+\dfrac{\sqrt3}{3}i\right) = -\dfrac1{18}+\dfrac{\sqrt3}{18}i$

c) $(\sqrt2)_{\frac\pi3}\cdot 2_{\frac{4\pi}{3}} = (2\sqrt2)_{\frac{5\pi}{3}} = 2\sqrt2\left(\dfrac12 - \dfrac{\sqrt3}{3}i\right) = \sqrt2-\sqrt6 i$

21. Si $z = 4_{60°}$ y $z' = 2_{45°}$ calcula:

a) $z+z'$ **b)** $z\cdot z'$

c) $\dfrac{z}{z'}$ **d)** $z^2\cdot z'$

e) $z^2\cdot\overline{z'}$ **f)** $(-z)\cdot z'$

$z = 4_{60} = 4(\cos 60° + i\text{sen } 60°) = 4\left(\dfrac12 - \dfrac{\sqrt3}{2}i\right) = 2+2\sqrt3 i$

$z' = 2_{45} = 2(\cos 45° + i\text{sen } 45°) = 2\left(\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac{\sqrt2}{2}i\right) = \sqrt2+\sqrt2 i$

a) $z+z' = (2+2\sqrt3 i)+(\sqrt2+\sqrt2 i) = (2+\sqrt2)+(2\sqrt3+\sqrt2)i$

b) $z\cdot z' = 4_{60°}\cdot 2_{45°} = 8_{105°}$

c) $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{4_{60°}}{2_{45°}} = 2_{15°}$

d) $z^2\cdot z' = (4_{60°})^2\cdot 2_{45°} = 16_{120°}\cdot 2_{45°} = 32_{165°}$

e) $\overline{z'} = 2_{360°-45°} = 2_{315°}$; luego $z^2\cdot\overline{z'} = 16_{120°}\cdot 2_{315°} = 32_{435°} = 32_{75°}$

f) $-z = 4_{180°+60°} = 4_{240°}$; luego $(-z)\cdot z' = 4_{240°}\cdot 2_{45°} = 8_{285°}$

22. Calcula las siguientes potencias y expresa el resultado en forma binómica:

a) $(3-i)^4$ **b)** $\left[\left(\frac12\right)_{135°}\right]^3$

c) $[2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)]^3$

a) $(3-i)^4 = 28-96i$

b) $\left[\left(\dfrac12\right)_{135°}\right]^3 = \left(\dfrac12\right)^3_{3\cdot 135°} = \left(\dfrac18\right)_{405°} = \left(\dfrac18\right)_{45°} =$

$= \dfrac18(\cos 45° + i \text{ sen } 45°) = \dfrac{\sqrt2}{16} + \dfrac{\sqrt2}{16} i$

c) $[2(\cos 20° + i \text{ sen } 20°)]^3 = 8(\cos 60° + i \text{ sen } 60°) = 4+4\sqrt3 i$

23. Calcula y representa las siete primeras potencias del número $z = -1+i$

z en polares es $z=\sqrt2_{135°}$. Sus sucesivas potencias son: $z^2=2_{270°}$; $z^3=2\sqrt2_{45°}$; $z^4=4_{180°}$; $z^5=4\sqrt2_{315°}$; $z^6=8_{90°}$ y $z^7=8\sqrt2_{225°}$. Gráficamente:

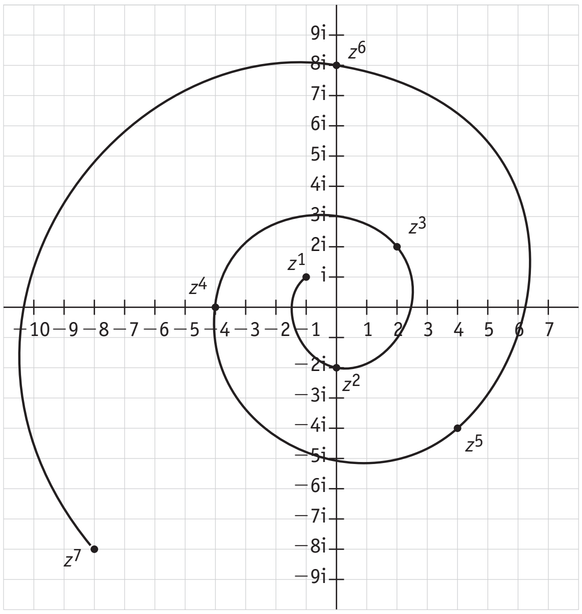

Fig. 9.7.

24. Halla las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1-i}{1+i}}$ **b)** $\sqrt[6]{\dfrac{1-2i}{2+i}}$

a) Las raíces cúbicas de $\dfrac{1-i}{1+i}$ son: i, $-\dfrac{\sqrt3}{2}-\dfrac12 i$ y $\dfrac{\sqrt3}{2}-\dfrac12 i$.

b) $\sqrt[6]{\dfrac{1-2i}{2+i}} = \sqrt[6]{-i} = \sqrt[6]{1_{270°}} = 1_{\frac{270°+k\cdot 360}{6}} = 1_{45°+k\cdot 60}$.

Luego las raíces sextas de $\dfrac{1-2i}{2+i}$ son: $1_{45°}$, $1_{105°}$, $1_{165°}$, $1_{225°}$, $1_{285°}$ y $1_{345°}$.

25. Si $z=(\sqrt2)_{75°}$ y $z'=4+4i$, calcula $\sqrt[3]{z\cdot z'}$.

En forma polar, $z'=(4\sqrt{2})_{45^\circ}$, luego $z\cdot z'=(\sqrt{2})_{75^\circ}\cdot(4\sqrt{2})_{45^\circ}=8_{120^\circ}$.
Por tanto, $\sqrt[3]{z\cdot z'}=\sqrt[3]{8_{120^\circ}}=2_{60^\circ+k\cdot 120^\circ}$.
Dando a k los valores 0, 1 y 2 se obtienen las raíces cúbicas: 2_{60°, 2_{180° y 2_{240°.

26. Calcula y expresa en forma binómica $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1+i^{101}}{1+i^{203}}\right)^2}$.

Recordando las potencias de i, será: $i^{101}=i^{4\cdot 25+1}=i^1=i$; $i^{203}=i^{4\cdot 50+3}=i^3=-i$. Luego

$$\frac{1+1^{101}}{1+i^{203}}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1+1^{101}}{1+i^{203}}\right)^2=i^2=-1.$$

Por tanto

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1+i^{101}}{1+i^{203}}\right)^2}=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}}=\begin{cases}1_{60^\circ}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ 1_{180^\circ}=-1\\ 1_{300^\circ}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$$

27. Calcula y dibuja las raíces octavas de la unidad.

$\sqrt[8]{1}=\sqrt[8]{1_{0^\circ}}=1_{\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{8}}$ $(k=0,1,\ldots,7)$. Sustituyendo k por estos valores, obtenemos 1_{0°, 1_{45°, 1_{90°, 1_{135°, 1_{180°, 1_{225°, 1_{270° y 1_{315°.

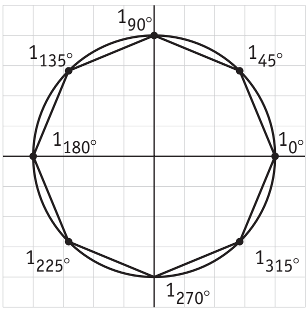

Fig. 9.8.

28. Utilizando números complejos, calcula sen 3α y cos 3α en función de sen α y cos α.

Por la fórmula de Moivre, para $n=3$,
$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\,\text{sen}\,3\alpha$. Desarrollando el primer miembro, $(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^3=$
$=\cos^3\alpha+3i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha-3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha-i\,\text{sen}^3\alpha$
e igualando las partes real e imaginaria de ambas expresiones, obtenemos:
$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha$ y
$\text{sen}\,3\alpha=3\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha-\text{sen}^3\alpha$.

29. Utilizando números complejos, calcula sen 4α y cos 4α en función de sen α y cos α.

Por la fórmula de Moivre, para $n=4$,
$(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^4=\cos 4\alpha+i\,\text{sen}\,4\alpha$. Desarrollando el primer miembro, $(\cos\alpha+i\,\text{sen}\,\alpha)^4=$
$=\cos^4\alpha+4i\cos^3\alpha\,\text{sen}\,\alpha-6\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha-4i\,\text{sen}^3\alpha\cos\alpha+\text{sen}^4\alpha$
e igualando las partes real e imaginaria de ambas expresiones, obtenemos:
$\cos 4\alpha=\cos^4\alpha-6\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^4\alpha$ y
$\text{sen}\,4\alpha=4\cos^3\alpha\,\text{sen}\,\alpha-4\text{sen}^3\alpha\cos\alpha$.

30. Utilizando números complejos, calcula el seno y el coseno de 105º (observa que 105º = 60º + 45º).

Por una parte se tiene que $1_{60^\circ}\cdot 1_{45^\circ}=1_{105^\circ}=$
$=1(\cos 105^\circ+i\,\text{sen}\,105^\circ)=\cos 105^\circ+i\,\text{sen}\,105^\circ$.
Por otra parte, $1_{60^\circ}\cdot 1_{45^\circ}=$
$=1(\cos 60^\circ+i\,\text{sen}\,60^\circ)\cdot 1(\cos 45^\circ+i\,\text{sen}\,45^\circ)=$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}i+\frac{\sqrt{6}}{4}i^2=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}i$$

Igualando partes real e imaginaria de ambas expresiones se obtiene:

$$\cos 105^\circ=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{sen}\,105^\circ=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Tipo III. Ecuaciones con coeficientes complejos

31. Encuentra la ecuación que tiene por raíces:
a) $2-i$ y $2+i$
b) $\sqrt{2}_{45^\circ}$, $\sqrt{2}_{315^\circ}$ y 3_{90°
c) 2, −3, i y $-i$

a) $[z-(2-i)]\cdot[z-(2+i)]=0\Leftrightarrow z^2-4z+5=0$.
b) $\sqrt{2}_{45^\circ}=1+i$; $\sqrt{2}_{315^\circ}=1-i$ y $3_{90^\circ}=3i$, luego la ecuación es
$[z-(1+i)]\cdot[z-(1-i)]\cdot(z-3i)=0\Leftrightarrow$
$(z^2-2z+2)\cdot(z-3i)=0\Leftrightarrow$
$z^3+(-2-3i)z^2+(2+6i)z-6i=0$.
c) $(z-2)\cdot(z+3)\cdot(z-i)\cdot(z+i)=0\Leftrightarrow$
$z^4+z^3-5z^2+z-6=0$.

32. Halla las soluciones, reales o complejas, de las ecuaciones:
a) $z^2-2z+5=0$
b) $z^4-256=0$
c) $z^4+2z^2+2=0$
d) $z^4+(1-\sqrt{3}i)=0$.

a) $z=\dfrac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\dfrac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i$

b) $z^4-256=0\Leftrightarrow z=\sqrt[4]{256}=\sqrt[4]{256_{0^\circ}}=4_{\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}=$
$=4_{0^\circ+k\cdot 90^\circ}$. Las soluciones son: 4, $4i$, -4 y $-4i$,

c) $z^4+2z^2+2=0\Leftrightarrow z^2=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\dfrac{-2\pm 2i}{2}=-1\pm i$

- Si $z^2=-1+i\ \Rightarrow z=\sqrt{-1+i}=\sqrt{\sqrt{2}_{135^\circ}}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{135^\circ+k\cdot 360^\circ}{2}}$
  cuyas soluciones son $(\sqrt[4]{2})_{67^\circ 30'}$ y $(\sqrt[4]{2})_{247^\circ 30'}$

- Si $z^2=-1-i \Rightarrow z=\sqrt{-1-i}=\sqrt{\sqrt{2}_{225^\circ}}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{225^\circ+k\cdot 360^\circ}{2}}$ cuyas soluciones son $(\sqrt[4]{2})_{112^\circ 30'}$ y $(\sqrt[4]{2})_{292^\circ 30'}$

d) $z^4+(1-\sqrt{3}i)=2 \Leftrightarrow z^4=-1+\sqrt{3}i \Rightarrow$

$\Rightarrow z=\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}=(\sqrt[4]{2})_{\frac{120^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}=(\sqrt[4]{2})_{30^\circ+k\cdot 90^\circ}$

Las soluciones son: $z_1=(\sqrt[4]{2})_{30^\circ}$; $z_2=(\sqrt[4]{2})_{120^\circ}$; $z_3=(\sqrt[4]{2})_{210^\circ}$ y $z_4=(\sqrt[4]{2})_{300^\circ}$.

33. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^5-1=0$ b) $z^3+8=0$ c) $z^4+8+8\sqrt{3}i=0$
d) $z^4-i^{25}=0$ e) $z^6+7z^3-8=0$

a) $z=\sqrt[5]{1}=\sqrt[5]{1_{0^\circ}}=1_{\frac{0^\circ+k\cdot 360^\circ}{5}}=1_{k\cdot 72^\circ}$. Luego las soluciones son: 1_{0°; 1_{72°; 1_{144°; 1_{216° y 1_{288°.

b) $z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8_{180^\circ}}=2_{\frac{180^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}}=2_{60^\circ+k\cdot 120^\circ}$. Luego las soluciones son: 2_{60°; 2_{180° y 2_{300°

c) $z=\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}i}=\sqrt[4]{16_{240^\circ}}=2_{\frac{240^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}=2_{60^\circ+k\cdot 90^\circ}$. Luego las soluciones son: 2_{60°; 2_{150°; 2_{240° y 2_{330°.

d) $z^4-i^{25}=0 \Leftrightarrow z^4-i=0 \Leftrightarrow z^4=i \Leftrightarrow z=\sqrt[4]{i}=$
$=\sqrt[4]{1_{90^\circ}}=1_{\frac{90^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}$; las soluciones son $1_{22^\circ 30'}$; $1_{112^\circ 30'}$; $1_{202^\circ 30'}$ y $1_{292^\circ 30'}$.

e) $z^6+7z^3-8=0$. Si hacemos $z^3=t$, la ecuación se transforma en una de segundo grado: $t^2+7t-8=0$, de fácil solución. $t^2+7t-8=0 \Leftrightarrow (t-1)(t+8)=0$. La ecuación inicial, por tanto, se puede escribir: $z^6+7z^3-8=0 \Leftrightarrow (z^3-1)(z^3+8)=0$. Ahora, las soluciones de $z^3+1=0$ son: 1_{0°, 1_{120° y 1_{240°; las de $z^3+8=0$ son: 2_{60°, 2_{180° y 2_{300°.

34. Resuelve la ecuación $3z+3i-1=\dfrac{-z+3iz-12}{z}$.

Quitando denominadores, la ecuación es equivalente a:
$3z^2+3iz-z=-z+3iz-12 \Leftrightarrow 3z^2=-12 \Leftrightarrow$
$z^2=-4 \Rightarrow z=\sqrt{-4}=\pm 2i$

35. El número $\sqrt{3}+i$ es la raíz cúbica de un número complejo z. Halla la forma binómica de dicho número y de las otras raíces cúbicas.

Si $\sqrt{3}+i=\sqrt[3]{z} \Rightarrow z=(\sqrt{3}+i)^3$, luego el número buscado es $z=(\sqrt{3}+i)^3=8i$.

Las raíces cúbicas de z son: $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{8i}=\sqrt[3]{8_{90^\circ}}=2_{\frac{90^\circ+k\cdot 360^\circ}{3}}=2_{30^\circ+k\cdot 120^\circ}$

En forma binómica, $2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$, $2_{150}=-\sqrt{3}+i$ y $2_{270^\circ}=-2i$.

36. El número $-2i$ es una raíz quinta de un número complejo. Calcula las otras raíces y el número.

$-2i=\sqrt[5]{z} \Rightarrow z=(-2i)^5=-32i^5=-32i=32_{270^\circ}$. Las otras raíces son: $\sqrt[5]{z}=\sqrt[5]{32_{270^\circ}}=2_{\frac{270^\circ+k\cdot 360^\circ}{5}}=2_{54^\circ+k\cdot 72^\circ}$ es decir, 2_{54°, 2_{126°, 2_{198°, 2_{270° y 2_{342°.

37. Halla dos números complejos cuya suma sea $3-8i$ y su producto $-13-12i$.
(*Recuerda:* una ecuación de 2º grado es de la forma $z^2-Sz+P=0$, donde S y P son, respectivamente, la suma y el producto de las soluciones).

Los números buscados son las soluciones de la ecuación

$z^2-(3-8i)z+(-13-12i)=0$, es decir, $z_1=\dfrac{3}{2}-\left(4+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$ y

$z_2=\dfrac{3}{2}-\left(4-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$.

38. Determina los números complejos cuyo inverso sea igual al cuádruple de su opuesto.

Si z es uno de dichos números, la condición del enunciado es que $\dfrac{1}{z}=4(-z) \Rightarrow 1=-4z^2 \Leftrightarrow 4z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-\dfrac{1}{4}$.

Los números buscados son $z=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2}i$.

39. El producto de dos números complejos $-6i$ y la suma de sus cuadrados 5. Calcúlalos.

Si los números son z y z' se verifica: $\begin{cases} z\cdot z'=-6i \\ z^2+(z')^2=; \end{cases}$

de la primera, $z'=\dfrac{-6i}{z}$ y sustituyendo en la segunda,

$z^2+\left(\dfrac{-6i}{z}\right)^2=5 \Leftrightarrow z^2-\dfrac{36}{z^2}=5 \Leftrightarrow z^4-5z^2-36=0 \Rightarrow z=\pm 3$

o $z=\pm 2i$. Sustituyendo estos valores en $z'=\dfrac{-6i}{z}$, se obtiene

que los números buscados son $\begin{cases} z=3 \\ z'=-2i \end{cases}$ o $\begin{cases} z=-3 \\ z'=2i \end{cases}$.

40. El producto de dos números es $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y su cociente $\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i$. Calcúlalos.

Sean z_1 y z_2 los números buscados. Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ \dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i. \end{cases}$$

Despejando z_1 en la segunda ecuación es $z_1=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i\right)z_2$;

llevando esta expresión a la primera ecuación, se tiene que

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i\right)z_2\cdot z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$

$$z_2^2=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{\dfrac{\sqrt{3}}{18}+\dfrac{1}{18}i}=\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}i=9_{30^\circ}$$

Luego $z_2=\sqrt{9_{30^\circ}}=3_{\frac{30^\circ+k\cdot 360^\circ}{2}}$. Llevando cada uno de estos valores a la relación $z_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{18}+\frac{1}{18}i\right)z_2$ obtenemos que dos pares de soluciones. Son:

- Si $z_2=3_{15^\circ}$ es $z_1=\left(\frac{1}{3}\right)_{45^\circ}$
- Si $z_2=3_{195^\circ}$ es $z_1=\left(\frac{1}{3}\right)_{225^\circ}$

41. Halla dos números complejos sabiendo que su producto vale $2i$ y que el cubo de uno dividido por el otro es 2.

Sean z_1 y z_2 los números buscados. Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} z_1\cdot z_2=2i \\ \dfrac{(z_1)^3}{z_2}=2 \end{cases}$$

Despejando z_2 en la primera es $z_2=\frac{2i}{z_1}$; llevando a la segunda obtenemos la ecuación $z_1^4=4i \Leftrightarrow z_1^4=4_{90^\circ}$.

Luego $z_1=\sqrt[4]{4_{90^\circ}}=(\sqrt{2})_{\frac{90^\circ+k\cdot 360}{4}}$. Llevando cada uno de estos valores a la relación $z_2=\frac{2i}{z_1}$ obtenemos los cuatro pares de soluciones. Son:

- Si $z_1=\sqrt{2}_{22^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{67^\circ 30'}$
- Si $z_1=\sqrt{2}_{112^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{337^\circ 30'}$
- Si $z_1=\sqrt{2}_{202^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{247^\circ 30'}$
- Si $z_1=\sqrt{2}_{292^\circ 30'}$ es $z_2=\sqrt{2}_{157^\circ 30'}$

42. Halla la longitud de los lados y el área del cuadrilátero cuyos vértices son los afijos de la ecuación $z^4+16=0$.

Las soluciónes de la ecuación $z^4+16=0$ son $z=\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{16_{180^\circ}}=2_{45^\circ+k\cdot 90^\circ}$. Por tanto, los vértices del cuadrilátero son los afijos de los números 2_{45°, 2_{135°, 2_{225° y 2_{315°. Dichos afijos, que están situados sobre una circunferencia de radio 2, forman un polígono regular, luego el cuadrilátero es un cuadrado. Su diagonal d, que es el diámetro de la circunferencia, mide $d=4$. Si l es el lado del cuadrado es $d=l\sqrt{2}$, luego $l=\frac{4}{\sqrt{2}}$ y por tanto, el área vale $A=l^2=\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2=8u^2$.

43. Calcula el área del pentágono cuyos vértices son los afijos de las soluciones de la ecuación $z^5-1=0$.

Las soluciones de la ecuación son los números $1_{72^\circ\cdot k}$. Al unir cada afijo con el origen de coordenadas obtenemos cinco triángulos isósceles e iguales entre sí. En cada uno de ellos, los lados iguales miden 1 (el radio de la circunferencia) y el lado desigual, que es el lado del pentágono, lo calculamos por la relación $\text{sen } 36^\circ=\frac{l/2}{1} \Rightarrow l=2\cdot\text{sen}36^\circ=1{,}18$ u.

Como $\cos 36^\circ=\frac{h}{1}$, la altura de cada triángulo vale $h=0{,}81$.

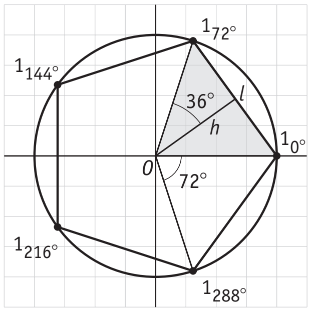

Fig. 9.9.

Por tanto, el área de cada triángulo es $A_T=\frac{l\cdot h}{2}\approx 0{,}48$ u² y, por último, el área del pentágono es $S=5\cdot A_T=2{,}4\ u^2$.

44. Los afijos de dos números complejos conjugados y el origen de coordenadas determinan un triángulo. Calcula esos dos números para que el triángulo sea equilátero de área $3\sqrt{3}$.

Si un número es $z=a+bi$, el otro es $\bar{z}=a-bi$. Para que el triángulo sea equilátero, $\sqrt{a^2+b^2}=2b$.

El área es $S=\frac{\text{base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{2b\cdot a}{2}=ba$, que como ha de valer $3\sqrt{3}$ se obtiene otra ecuación: $ab=3\sqrt{3}$. Obtenemos, por tanto, el sistema $\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}=2b \\ ab=3\sqrt{3}\end{cases}$ que podemos poner $\begin{cases} a^2+b^2=4b^2 \\ a^2b^2=27\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=3b^2 \\ a^2b^2=27\end{cases}$.

Sustituyendo la 1ª en la 2ª se obtiene $b^4=9 \Leftrightarrow b^2=3 \Rightarrow b=\pm\sqrt{3}$ y, por tanto, $a=\pm 3$. Los números buscados son: $z=3+\sqrt{3}i$ y $\bar{z}=3-\sqrt{3}i$ o $z=-3-\sqrt{3}i$ y $\bar{z}=-3+\sqrt{3}i$.

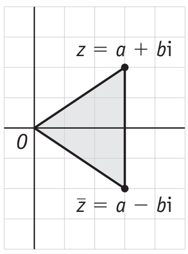

Fig. 9.10.

45. Un cuadrado con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto $A(1, 2)$. Calcula los demás vértices.

Sean B, C y D los otros vértices. Dado que los lados de un cuadrado forman entre sí ángulos de 90º, para calcular B, tendremos que aplicar un giro de 90º al vértice $A(1, 2)$. Si giramos 90º este vértice B obtendremos C y si a C, lo giramos 90º más, obtendremos D. Y como sabemos, girar 90º equivale a multiplicar por i el afijo correspondiente. Así:
B es el afijo de $(1+2i)\cdot i=-2+i$. Es decir $B(-2, 1)$.
C es el afijo de $(-2+i)\cdot i=-1-2i$. Es decir $C(-1, -2)$.
D es el afijo de $(-1-2i)\cdot i=2-i$. Es decir $D(2, -1)$.

46. Un hexágono con centro en el origen tiene uno de sus vértices en el punto $A(1, 1)$. Calcula los demás vértices.

El punto $A(1, 1)$ es el afijo del número $(\sqrt{2})_{45^\circ}$. Cada vértice se obtiene del anterior girándolo 60º. O lo que es lo mismo, multiplicando por 1_{60° el número que representa su afijo. Así B es el afijo del número $(\sqrt{2})_{45^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = (\sqrt{2})_{105^\circ}$; C es el afijo del número $(\sqrt{2})_{105^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = (\sqrt{2})_{165^\circ}$; D es $(\sqrt{2})_{165^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = (\sqrt{2})_{225^\circ}$; E es $(\sqrt{2})_{225^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = (\sqrt{2})_{285^\circ}$ y F es $(\sqrt{2})_{285^\circ} \cdot 1_{60^\circ} = (\sqrt{2})_{345^\circ}$.

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más.

1. El conjugado del opuesto de $z = 3 - 4i$ es:
a) $-3 - 4i$ b) $3 + 4i$ c) $-3 + 4i$

a) $-3 - 4i$

2. El resultado de la operación $2(2 - 3i) - i(3 + 4i)$ es:
a) $-9i$ b) $8 - 9i$ c) $7 - 10i$

b) $8 - 9i$

3. El producto de dos números complejos conjugados es un número:
a) real b) imaginario puro

a) real

4. Halla el inverso de $3 + i$:

$\frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$

5. El número $1 + i^{5015}$ es igual que:
a) 0 b) $1 + i$ c) $1 - i$

c) $1 - i$

6. La forma polar del número $3 - \sqrt{3}i$ es:
a) $\sqrt{12}_{60^\circ}$ b) $\sqrt{12}_{300^\circ}$ c) $\sqrt{6}_{300^\circ}$

b) $\sqrt{12}_{300^\circ}$

7. El producto $2_{30^\circ} \cdot 4_{30^\circ}$ vale:
a) 8(cos 60º + $i$sen 60º)
b) 8(cos 30º + $i$sen 30º)
c) 8(cos 900º + $i$sen 900º)

a) 8(cos 60º + $i$sen 60º)

8. Con ayuda de la representación gráfica contesta: ¿multiplicar por i equivale a efectuar...
a) un giro de 90º?
b) un giro de 180º?

a) un giro de 90º

9. Las soluciones de la ecuación $z^2 - 2z + 26 = 0$ son:
a) $2 + i$ y $2 - i$, b) $1 - 5i$ y $1 + 5i$ c) $5 - i$ y $5 + i$

b) $1 - 5i$ y $1 + 5i$

10. Las raíces cúbicas de -8, $\sqrt[3]{-8}$, son:
a) 2_{180°, 2_{270° y 2_{360} b) 2_{30°, 2_{150° y 2_{270°
c) 2_{60°, 2_{180° y 2_{300°

c) 2_{60°, 2_{180° y 2_{300°

2 cuestiones para investigar

1. Las raíces de la ecuación $z^2 - 1 = 0$ (que son $+1$ y -1 y se llaman *raíces cuadradas de la unidad*) suman 0 y su producto vale -1. Igualmente, las *raíces cúbicas de la unidad* (es decir las soluciones de la ecuación $z^3 - 1 = 0$) suman 0, pero su producto vale $+1$.
a) ¿Qué pasa con las raíces cuartas de la unidad?
b) ¿Y con las raíces de la ecuación $z^5 - 1 = 0$?

a) Las raíces de $z^4 - 1 = 0$ son $+1$, -1, i y $-i$. Su suma es 0 y su producto $+1$.

b) Las raíces de esta ecuación son *las raíces quintas de la unidad*, es decir los números complejos $\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{1_{0^\circ}} = 1_{\frac{0^\circ + 360^\circ \cdot k}{5}} = 1_{72^\circ \cdot k}$ (con $k = 0, 1, 2, 3, 4$). Estas cinco raíces son los números: 1_{0°; 1_{72°; 1_{144°; 1_{216° y 1_{288°.

- Su suma vale: $1_{0^\circ} + 1_{72^\circ} + 1_{144^\circ} + 1_{216^\circ} + 1_{288^\circ} = 1_{0^\circ} + 1_{72^\circ} + (1_{72^\circ})^2 + (1_{72^\circ})^3 + (1_{72^\circ})^4$ (obsérvese que estos números forman progresión geométrica de razón $r = 1_{72^\circ}$, luego puede aplicarse la fórmula $S = \frac{a_n \cdot r \cdot a_1}{r - 1}$). Por tanto, la suma pedida vale $S = \frac{(1_{72^\circ})^4 \cdot 1_{72^\circ} - 1_{0^\circ}}{1_{72^\circ} - 1} = \frac{1_{288^\circ} \cdot 1_{72^\circ} - 1_{0^\circ}}{1_{72^\circ} - 1} = \frac{1_{360^\circ} - 1_{0^\circ}}{1_{72^\circ} - 1} = \frac{1_{0^\circ} - 1_{0^\circ}}{1_{72^\circ} - 1} = \frac{0}{1_{72^\circ} - 1} = 0$. Es decir, *la suma vale cero*.
- Su producto vale: $1_{0^\circ} \cdot 1_{72^\circ} \cdot 1_{144^\circ} \cdot 1_{216^\circ} \cdot 1_{288^\circ} = 1_{0^\circ + 72^\circ + 144^\circ + 216^\circ + 288^\circ} = 1_{720^\circ} = 1_{0^\circ} = 1$.
Es decir, *el producto vale 1*.

2. En 1904 el matemático Helge von Koch dio a conocer la que posteriormente se conoció como *curva de Koch* o *copo de nieve*. En 1975 Mandelbrot designó con la palabra fractal a este tipo de curvas. Él mismo consiguió unas imágenes maravillosas al iterar, con ayuda de ordenadores, la función compleja $f(z) = z^2 + c$. Investiga sobre los fractales (y sorpréndete con sus imágenes) en la dirección: http://www.arrakis.es/~sysifus/intro.html. También merece la pena visitar: http://www.geocities.com/capecanaveral/cockpit/5889/cuerpos.html.

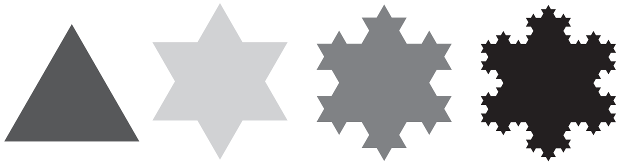

Fig. 9.11.