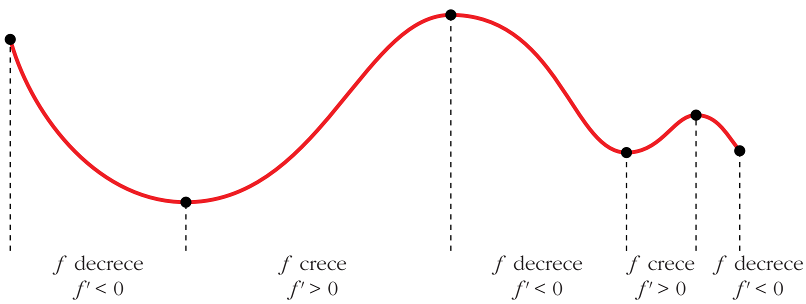
10 APLICACIONES DE LA DERIVADA

Página 274

Relación del crecimiento con el signo de la primera derivada

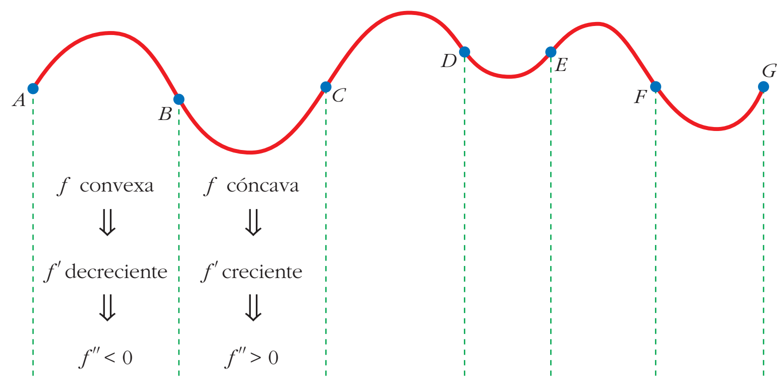
■ **Analiza la curva siguiente:**



Página 275

Relación de la curvatura con el signo de la segunda derivada

■ **Describe el tramo *CD* y los tramos *DE*, *EF* y *FG* siguientes:**



$CD \to f$ convexa $\to f'$ decreciente $\to f'' < 0$

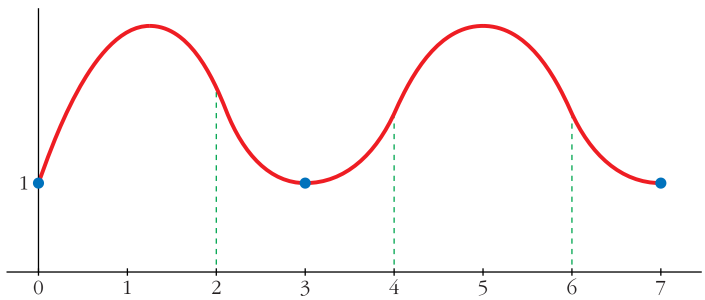
$DE \to f$ cóncava $\to f'$ creciente $\to f'' > 0$

$EF \to f$ convexa $\to f'$ decreciente $\to f'' < 0$

$FG \to f$ cóncava $\to f'$ creciente $\to f'' > 0$

■ **Dibuja la gráfica de una función, *f*, que cumpla las siguientes condiciones:**

- **La función está definida en [0, 7].**
- **Solo toma valores positivos.**
- **Pasa por los puntos (0, 1), (3, 1) y (7, 1).**
- **En el intervalo (1, 2), la función es convexa.**
- **En el intervalo (2, 4), $f'' > 0$.**
- **En el intervalo (4, 6), f' es decreciente.**
- **En el intervalo (6, 7), f es cóncava.**



Página 276

1. Halla las rectas tangentes a la curva:

$$y = \frac{5x^3 + 7x^2 - 16x}{x - 2}$$

en los puntos de abscisas 0, 1, 3.

Calculamos la derivada de la función:

$$y' = \frac{(15x^2 + 14x - 16)(x - 2) - (5x^3 + 7x^2 - 16x)}{(x - 2)^2} = \frac{10x^3 - 23x^2 - 28x + 32}{(x - 2)^2}$$

Ordenadas de los puntos:

$$y(0) = 0; \quad y(1) = 4; \quad y(3) = 150$$

- **Recta tangente en (0, 0):** $y'(0) = 8$

$$y = 8x$$

- **Recta tangente en (1, 4):** $y'(1) = -9$

$$y = 4 - 9(x - 1) = -9x + 13$$

- **Recta tangente en (3, 150):** $y'(3) = 11$

$$y = 150 + 11(x - 3) = 11x + 117$$

2. Halla las rectas tangentes a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$$

en los puntos de abscisa $x_0 = 3$.

Obtención de las ordenadas correspondientes:

$$3^2 + y^2 - 2 \cdot 3 + 4y - 24 = 0$$

$$9 + y^2 - 6 + 4y - 24 = 0$$

$$y^2 + 4y - 21 = 0$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-4 \pm 10}{2} \begin{cases} y = 3 & \to \text{ Punto } (3, 3) \\ y = -7 & \to \text{ Punto } (3, -7) \end{cases}$$

Para hallar la pendiente en esos puntos, derivamos implícitamente:

$$2x + 2yy' - 2 + 4y' = 0$$

$$y'(2y + 4) = 2 - 2x$$

$$y' = \frac{2 - 2x}{2y + 4} = \frac{1 - x}{y + 2}$$

Así: $y'(3, 3) = -\frac{2}{5}$; $y'(3, -7) = \frac{2}{5}$

- **Recta tangente en (3, 3):** $y = 3 - \frac{2}{5}(x - 3) = -\frac{2}{5}x + \frac{21}{5}$
- **Recta tangente en (3, –7):** $y = -7 + \frac{2}{5}(x - 3) = \frac{2}{5}x - \frac{41}{5}$

Página 277

1. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, averigua:

a) Dónde crece. **b) Dónde decrece.**

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$

a) $x < -1 \;\to\; y' > 0 \;\to\; f$ es creciente en $(-\infty, -1)$

$x > 3 \;\to\; y' > 0 \;\to\; f$ es creciente en $(3, +\infty)$

b) $-1 < x < 3 \;\to\; y' < 0 \;\to\; f$ es decreciente en $(-1, 3)$

Página 279

2. Comprueba que la función $y = x^3/(x - 2)^2$ tiene solo dos puntos singulares, en $x = 0$ y en $x = 6$.

Averigua de qué tipo es cada uno de ellos estudiando el signo de la derivada.

$$y' = \frac{3x^2(x-2)^2 - 2(x-2)x^3}{(x-2)^4} = \frac{x^2(x-2)(3(x-2)-2x)}{(x-2)^4} =$$

$$= \frac{x^2(3x-6-2x)}{(x-2)^3} = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$$

$$y' = 0 \;\;\rightarrow\;\; x^2(x-6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 0$ hay un punto de inflexión.

$\left.\begin{array}{l} f'(5{,}99) < 0 \\ f'(6{,}01) > 0 \end{array}\right\}$ En $x = 6$ hay un mínimo relativo

3. **a) Halla todos los puntos singulares (abscisa y ordenada) de la función $y = -3x^4 + 4x^3$. Mediante una representación adecuada, averigua de qué tipo es cada uno de ellos.**

b) Ídem para $y = x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9$.

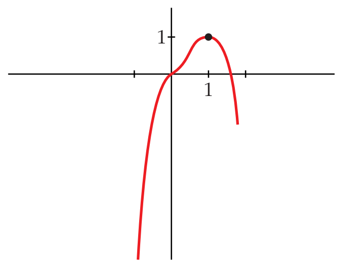
a) $y' = -12x^3 + 12x^2 = 12x^2(-x + 1)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = 0 \;\;\rightarrow\;\; \text{Punto } (0,\ 0) \\ x = 1 \;\;\rightarrow\;\; \text{Punto } (1,\ 1) \end{cases} \Bigg\} \text{ Dos puntos singulares.}$$

Los dos puntos están en el intervalo $[-1;\ 1{,}5]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-1) = -7$ y $f(1{,}5) = -1{,}7$.

- En $(0,\ 0)$ hay un *punto de inflexión*.
- En $(1,\ 1)$ hay un *máximo relativo*.



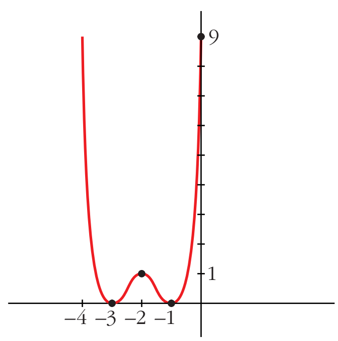
b) $y' = 4x^3 + 24x^2 + 44x + 24 = 4(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

$$y' = 0 \begin{cases} x = -1 \;\;\rightarrow\;\; \text{Punto } (-1,\ 0) \\ x = -2 \;\;\rightarrow\;\; \text{Punto } (-2,\ 1) \\ \end{cases} \Bigg\} \text{ Tres puntos singulares.}$$

Los tres puntos están en el mismo intervalo $[-4,\ 0]$, donde la función es derivable.

Además, $f(-4) = f(0) = 9$.

- Hay un *mínimo relativo* en $(-3,\ 0)$, un *máximo relativo* en $(-2,\ 1)$ y un *mínimo relativo* en $(-1,\ 0)$.



Página 281

1. Estudia la curvatura de la función: $y = 3x^4 - 8x^3 + 5$

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2$; $f''(x) = 36x^2 - 48x$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 12x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; \text{Punto } (0, 5) \\ x = \dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right) \end{cases}$$

$$\left(f'''(x) = 72x - 48;\; f'''(0) \neq 0;\; f'''\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0\right)$$

Los puntos $(0, 5)$ y $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{121}{27}\right)$ son puntos de inflexión.

- La función es cóncava en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$, pues $f''(x) > 0$.
- La función es convexa en el intervalo $\left(0, \dfrac{4}{3}\right)$, pues $f''(x) < 0$.

2. Estudia la curvatura de la función: $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; \text{Punto } (2, 2)$$

$$\left(f'''(x) = 6;\; f'''(2) \neq 0\right)$$

El punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

- La función es convexa en $(-\infty, 2)$, pues $f''(x) < 0$.
- La función es cóncava en $(2, +\infty)$, pues $f''(x) > 0$.

Página 283

1. Halla el número positivo cuya suma con veinticinco veces su inverso sea mínima.

Llamamos x al número que buscamos. Ha de ser $x > 0$. Tenemos que minimizar la función:

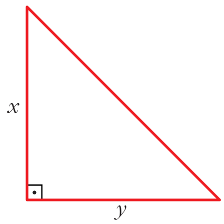
$$f(x) = x + \frac{25}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2} = 0 \begin{cases} x = 5 \;\rightarrow\; f(5) = 10 \\ x = -5 \;\text{ (no vale, pues } x > 0) \end{cases}$$

(Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, y la función es continua en $(0, +\infty)$; hay un mínimo en $x = 5$).

Por tanto, el número buscado es $x = 5$. El mínimo es 10.

2. **De todos los triángulos rectángulos cuyos catetos suman 10 cm, halla las dimensiones de aquel cuya área es máxima.**



$x + y = 10 \quad \rightarrow \quad y = 10 - x$

$\text{Área} = \dfrac{x \cdot y}{2} = \dfrac{x \cdot (10 - x)}{2} = \dfrac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$

Tenemos que maximizar la función:

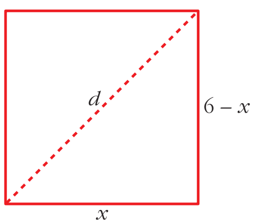
$$f(x) = \frac{10x - x^2}{2}, \quad 0 < x < 10$$

$$f'(x) = \frac{10 - 2x}{2} = 5 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 5 \quad \rightarrow \quad y = 10 - 5 = 5$$

$\left(f(0) = 0;\ f(10) = 0;\ f(5) = \dfrac{25}{2};\ \text{y } f \text{ es continua. Luego, en } x = 5 \text{ está el máximo} \right).$

Los catetos miden 5 cm cada uno. El área máxima es de 12,5 cm^2.

3. **Entre todos los rectángulos de perímetro 12 m, ¿cuál es el que tiene la diagonal menor?**



$d = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

Tenemos que minimizar la función:

$f(x) = \sqrt{(6 - x)^2 + x^2}, \quad 0 < x < 6$

$$f'(x) = \frac{-2(6 - x) + 2x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-12 + 4x}{2\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}} = \frac{-6 + 2x}{\sqrt{(6 - x)^2 + x^2}}$$

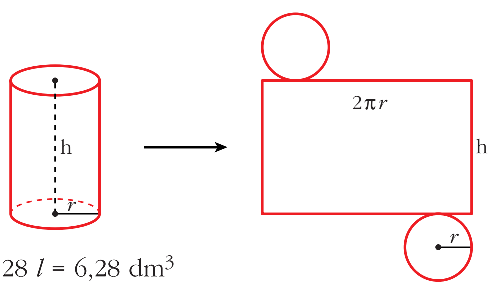
$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad -6 + 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 3$$

$(f(0) = 6;\ f(6) = 6;\ f(3) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \simeq 4{,}24;$ y $f(x)$ es continua. Luego, en $x = 3$ hay un mínimo).

El rectángulo con la diagonal menor es el cuadrado de lado 3 m.

4. **Determina las dimensiones que debe tener un recipiente cilíndrico de volumen igual a 6,28 litros para que pueda construirse con la menor cantidad posible de hojalata.**

Suponemos el recipiente con dos tapas:



$\text{Área total} = 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 =$

$= 2\pi r(\text{h} + r)$

$V = 6{,}28\ l = 6{,}28\ \text{dm}^3$

Como $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot r^2 \cdot h = 6,28 \;\rightarrow\; h = \dfrac{6,28}{3,14 \cdot r^2} = \dfrac{2}{r^2} = h$

Así: $\text{Área total} = 2\pi r\left(\dfrac{2}{r^2} + r\right) = 2\pi\left(\dfrac{2}{r} + r^2\right)$

Tenemos que hallar el mínimo de la función:

$$f(r) = 2\pi\left(\frac{2}{r} + r^2\right), \quad r > 0$$

$$f'(r) = 2\pi\left(-\frac{2}{r^2} + 2r\right) = 2\pi\left(\frac{-2 + 2r^3}{r^2}\right) = 0 \;\rightarrow\; -2 + 2r^3 = 0 \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{1} = 1$$

(Como $\lim\limits_{r \to 0^+} f(r) = +\infty$, $\lim\limits_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, y f es continua en $(0, +\infty)$; en $r = 1$ hay un mínimo).

$$r = 1 \;\rightarrow\; h = \frac{2}{r^2} = \frac{2}{1} = 2$$

El cilindro tendrá radio 1 dm y altura 2 dm.

Página 284

1. Calcula, aplicando L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x\,(1 + \cos x)}{x \cos x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}\, x}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x(1 + \cos x)}{x \cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x(1 + \cos x) + \text{sen}\, x(-\text{sen}\, x)}{\cos x + x(-\text{sen}\, x)} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}\, x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

2. Calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-e^{-x} + 1}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^3 + x^2 - x - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 4x + 1}{3x^2 + 2x - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{6x + 4}{6x + 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

Página 285

3. Aplica L'Hôpital: $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

Para poner $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$ en forma de cociente, tomamos logaritmos en $f(x) = (\cos x + \operatorname{sen} x)^{1/x}$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln[f(x)]\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \ln(\cos x + \operatorname{sen} x)\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x + \operatorname{sen} x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(-\operatorname{sen} x + \cos x)/(\cos x + \operatorname{sen} x)}{1} = 1 \quad \to \quad \lim_{x \to 0} f(x) = e^1 = e$$

4. Calcula: $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x$

$$\lim_{x \to +\infty} (1 - 2^{1/x})x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - 2^{1/x}}{1/x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2^{1/x} \cdot (-1/x^2) \cdot \ln 2}{(-1/x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (-2^{1/x} \cdot \ln 2) = -\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$$

Página 286

1. a) Explica por qué $y = \operatorname{sen} x$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, \pi]$.

b) ¿En qué punto se verifica la tesis del teorema de Rolle?

a) $y = \operatorname{sen} x$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$.

Además, $f(0) = f(\pi) = 0$. Por tanto, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

b) $$\left.\begin{array}{l} y' = \cos x = 0 \\ x \in (0, \pi) \end{array}\right\} \quad \to \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Página 288

2. Aplica el teorema del valor medio, si es posible, a la función:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \ \text{ en } [-2, -1]$$

Calcula el valor correspondiente a c.

$f(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{6 - 12}{-1 + 2} = -6$$

$$f'(x) = 2x - 3 = -6 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-3}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \frac{-3}{2}$.

3. Repite el ejercicio anterior para la función $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

$g(x)$ es derivable (y, por tanto, continua) en todo $\mathbb{R}$. En particular, es continua en $[-2, -1]$ y derivable en $(-2, -1)$.

Luego, cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{0 - (-9)}{-1 + 2} = 9$$

$$g'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 9 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 10 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 120}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{124}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{31}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{31}}{3} \begin{cases} x \simeq 2{,}19 \\ x \simeq -1{,}52 \end{cases}$$

Por tanto, se cumple la tesis en $c = \frac{1 - \sqrt{31}}{3}$.

4. Demuestra que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿En qué punto cumple la tesis?

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (2x - 3) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} (-x^2 + 10x - 19) = 5 \\ f(4) = 5 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = 4.$$

Luego, $f(x)$ es continua en el intervalo $[2, 6]$. (Para $x \neq 4$ está formada por dos polinomios).

Veamos si es derivable:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

En $x = 4$, tenemos que $f'(4^-) = f'(4^+) = 2$. Por tanto, la función es derivable en $(2, 6)$. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Luego, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio.

Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$f'(c) = 1 \quad \to \quad -2x + 10 = 1 \quad \to \quad x = \frac{9}{2}$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{9}{2}$.

5. **Aplicando el teorema de Rolle, demuestra que $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$ cualquiera que sea el valor de b. (Hazlo por reducción al absurdo: empieza suponiendo que hay dos raíces en ese intervalo).**

- $f(x) = x^3 - 3x + b$ es continua en $[-1, 1]$ y derivable en $(-1, 1)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

La derivada solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$.

- Supongamos que $f(x)$ tiene dos raíces en $[-1, 1]$, sean c_1 y c_2. Por el teorema de Rolle, como $f(c_1) = f(c_2) = 0$, existiría un $c \in (c_1, c_2)$ tal que $f'(c) = 0$.

  Pero $f'(x)$ solo se anula en $x = -1$ y en $x = 1$, que no están incluidos en (c_1, c_2), pues $-1 \le c_1, c_2 \le 1$.

  Hemos llegado a una contradicción.

- Por tanto, $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera que sea el valor de b.

6. **Calcula p, m y n para que:**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + px & \text{si } -1 \le x \le 3 \\ mx + n & \text{si } 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 5]$. ¿Dónde cumple la tesis? Represéntala.

- Si $x \ne 3$, la función es continua, pues está formada por polinomios. Su dominio es $[-1, 5]$.

- En $x = 3$, para que sea continua, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (-x^2 + px) = -9 + 3p \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (mx + n) = 3m + n \\ f(3) = 3m + n = -9 + 3p \end{array}\right\} \quad -9 + 3p = 3m + n$$

- Si $x \in (-1, 5)$ y $x \neq 3$, su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + p & \text{si } -1 < x < 3 \\ m & \text{si } 3 < x < 5 \end{cases}$$

- Para que $f(x)$ sea derivable en $x = 3$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -6 + p \\ f'(3^+) = m \end{array}\right\} \; 6 + p = m$$

- Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle, además, debe tenerse que $f(-1) = f(5)$; es decir:

$$\left.\begin{array}{r} f(-1) = -1 - p \\ f(5) = 5m + n \end{array}\right\} \; -1 - p = 5m + n$$

- Uniendo las tres condiciones anteriores, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} -9 + 3p = 3m + n \\ -6 + p = m \\ -1 - p = 5m + n \end{array}\right\} \; m = -\frac{8}{3}; \;\; n = 9; \;\; p = \frac{10}{3}$$

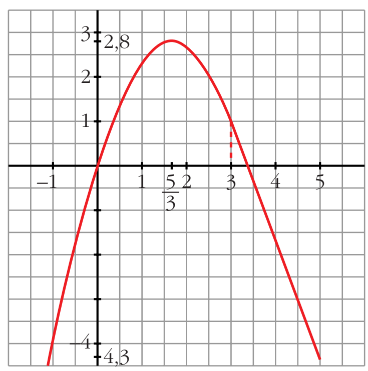
- Con estos valores:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + \dfrac{10}{3} & \text{si } -1 < x < 3 \\[2ex] -\dfrac{8}{3} & \text{si } 3 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$-2x + \frac{10}{3} = 0 \;\; \rightarrow \;\; x = \frac{5}{3} \in (-1, 5)$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{5}{3}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + \dfrac{10}{3}x & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\[2ex] -\dfrac{8}{3}x + 9 & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$



Página 290

1. Demuestra que: "Si f es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$ para $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$".

Si tomamos dos puntos cualesquiera $x_1 < x_2$ de $[a, b]$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en $[x_1, x_2]$ y, por tanto, su tesis:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) < 0$$

Se deduce que $f(x_2) - f(x_1) < 0$ y, por tanto, $f(x_2) < f(x_1)$.

La función es, pues, decreciente en $[a, b]$.

2. Demuestra que: "Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces f presenta un máximo en x_0".

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0$$

Si $h < 0$, entonces:

$f'(x_0 + h) > 0 \;\to\; f$ es creciente a la izquierda de x_0 (1)

Si $h > 0$, entonces:

$f'(x_0 + h) < 0 \;\to\; f$ es decreciente a la derecha de x_0 (2)

Por (1) y (2), f presenta un máximo en x_0, ya que es creciente a la izquierda de x_0 y decreciente a su derecha.

Página 297

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Recta tangente

1 Halla la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \ln(tg\, 2x)$ en $x = \frac{\pi}{8}$

b) $y = \sqrt{sen\, 5x}$ en $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 15 = 0$ en $x = 2$

a) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{8} \;\to\; y = 0$

• Pendiente de la recta: $y' = \frac{2(1 + tg^2\, 2x)}{tg\, 2x} \;\to\; y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 4$

• Recta tangente: $y = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right) = 4x - \frac{\pi}{2}$

b) • Ordenada en el punto: $x = \frac{\pi}{6} \;\to\; y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

• Pendiente de la recta:

$$y' = \frac{5\cos 5x}{2\sqrt{sen\ 5x}} \rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5(-\sqrt{3}/2)}{2\sqrt{2}/2} = \frac{-5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-5\sqrt{6}}{4}$$

• Recta tangente: $y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

c) • Ordenadas en los puntos:

$$4 + y^2 - 4 - 8y + 15 = 0 \rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{4} = \frac{8 \pm 2}{2} \begin{cases} y = 5 \rightarrow \text{Punto } (2, 5) \\ y = 3 \rightarrow \text{Punto } (2, 3) \end{cases}$$

• Pendiente de las rectas:

$$2x + 2yy' - 2 - 8y' = 0$$

$$y'(2y-8) = 2 - 2x \rightarrow y' = \frac{2-2x}{2y-8} = \frac{1-x}{y-4}$$

$$y'(2, 5) = \frac{1-2}{5-4} = -1$$

$$y'(2, 3) = \frac{1-2}{3-4} = 1$$

• Recta tangente en (2, 5): $y = 5 - 1 \cdot (x-2) \rightarrow y = -x + 7$

• Recta tangente en (2, 3): $y = 3 + 1 \cdot (x-2) \rightarrow y = x + 1$

2 S **Halla las tangentes a la curva $y = \frac{2x}{x-1}$ paralelas a la recta $2x + y = 0$.**

La pendiente de la recta $2x + y = 0$ es $m = -2$.

Buscamos los puntos en los que la derivada sea igual a -2:

$$y' = \frac{2(x-1) - 2x}{(x-1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{-2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$y' = -2 \rightarrow \frac{-2}{x^2 - 2x + 1} = -2 \rightarrow -2 = -2(x^2 - 2x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow \text{Punto } (2, 4) \end{cases}$$

Recta tangente en (0, 0): $y = -2x$

Recta tangente en (2, 4): $y = 4 - 2(x-2) \rightarrow y = -2x + 8$

3 **Escribe las ecuaciones de las tangentes en los puntos que se indican:**

a) $y = Sh\ x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ **en 0 y** $ln\ 2$

b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x+1}}$ **en** $x = 0$

c) $y = (x^2 + 1)^{sen\ x}$ **en** $x = 0$ **y** $x = \pi$

a) $y' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

- **En** $x = 0$ $\to$ $f(0) = 0;\quad f'(0) = 1$

  $y = x$

- **En** $x = ln\ 2$ $\to$ $f(ln\ 2) = \dfrac{3}{4};\quad f'(ln\ 2) = \dfrac{5}{4}$

  $y = \dfrac{3}{4} + \dfrac{5}{4}(x - ln\ 2)$

b) $y' = \dfrac{1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x+1}}} = \dfrac{2\sqrt{x+1} + 1}{4\sqrt{x+1}\sqrt{x + \sqrt{x+1}}};\quad f'(0) = \dfrac{3}{4};\quad f(0) = 1$

$y = 1 + \dfrac{3}{4}x$

c) Hallamos la derivada tomando logaritmos:

$ln\ y = ln(x^2 + 1)^{sen\ x} \quad\to\quad ln\ y = sen\ x \cdot ln(x^2 + 1)$

$\dfrac{y'}{y} = cos\ x \cdot ln(x^2 + 1) + sen\ x \cdot \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$y' = (x^2 + 1)^{sen\ x}\left[cos\ x \cdot ln(x^2 + 1) + \dfrac{2x\ sen\ x}{x^2 + 1}\right]$

- **En** $x = 0$**:** $\to$ $f(0) = 1;\quad f'(0) = 0 \quad\to\quad y = 1$

- **En** $x = \pi$**:** $\to$ $f(\pi) = 1;\quad f'(\pi) = -ln(\pi^2 + 1)$

  $y = 1 - ln(\pi^2 + 1) \cdot (x - \pi)$

4
S **Halla un punto de la gráfica** $y = x^2 + x + 5$ **en el cual la recta tangente sea paralela a** $y = 3x + 8$**.**

- La pendiente de la recta $y = 3x + 8$ es $m = 3$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga 3:

  $f'(x) = 2x + 1$

  $f'(x) = 3 \quad\to\quad 2x + 1 = 3 \quad\to\quad x = 1 \quad\to\quad y = 7$

- El punto es $(1, 7)$.

5 **S** **Halla una recta que sea tangente a la curva:**

$$y = x^2 - 2x + 3$$

y que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas. ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal?

- Si forma un ángulo de 45° con el eje de abscisas, su pendiente es $tg\ 45° = 1$.

- Buscamos un punto en el que la derivada valga 1:

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f'(x) = 1 \ \rightarrow\ 2x - 2 = 1 \ \rightarrow\ x = \frac{3}{2} \ \rightarrow\ y = \frac{9}{4}$$

- La recta es: $y = \frac{9}{4} + \left(x - \frac{3}{2}\right) \ \rightarrow\ y = x + \frac{3}{4}$

- Veamos si hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal; es decir, en el que la derivada valga cero:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \ \rightarrow\ x = 1 \ \rightarrow\ y = 2 \ \rightarrow\ \text{Punto } (1, 2)$$

6 **Obtén la ecuación de la recta tangente paralela al eje de abscisas en las siguientes curvas:**

a) $y = x \ln x$ **b)** $y = x^2 e^x$ **c)** $y = sen\ 2x$

Una recta paralela al eje de abscisas tiene pendiente cero.

a) $y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$$y' = 0 \ \rightarrow\ \ln x + 1 = 0 \ \rightarrow\ \ln x = -1 \ \rightarrow\ x = e^{-1} = \frac{1}{e} \ \rightarrow\ y = \frac{-1}{e}$$

La recta tangente en el punto $\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$ es: $y = \frac{-1}{e}$

b) $y' = 2x\,e^x + x^2 e^x = (2x + x^2)e^x$. Como $e^x \neq 0$ para todo x:

$$y' = 0 \ \rightarrow\ 2x + x^2 = 0 \ \rightarrow\ x(2 + x) = 0 \begin{cases} x = 0 \ \rightarrow\ \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 \ \rightarrow\ \text{Punto } (-2, 4/e^2) \end{cases}$$

- En el punto $(0, 0)$, la recta tangente es: $y = 0$

- En el punto $\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$, la recta tangente es: $y = \frac{4}{e^2}$

c) $y' = 2 \cos 2x$

$$y' = 0 \ \rightarrow\ 2 \cos 2x = 0 \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ \rightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k \ \rightarrow\ y = 1 \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \ \rightarrow\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k \ \rightarrow\ y = -1 \end{cases}$$

- En los puntos $\left(\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ 1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = 1$

- En los puntos $\left(\dfrac{3\pi}{4} + \pi k,\ -1\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$, la recta tangente es: $y = -1$

7 **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $x^y \cdot y^x = 1$ en el punto (1, 1).**

Para hallar la derivada tomamos logaritmos:

$$x^y \cdot y^x = 1 \ \rightarrow \ y\ ln\ x + x\ ln\ y = ln\ 1 \ \rightarrow \ y\ ln\ x + x\ ln\ y = 0$$

Derivamos:

$$y'\ ln\ x + y \cdot \frac{1}{x} + ln\ y + x \cdot \frac{y'}{y} = 0$$

$$y'\ xy\ ln\ x + y^2 + xy\ ln\ y + x^2\ y' = 0$$

$$y'(xy\ ln\ x + x^2) = -y^2 - xy\ ln\ y$$

$$y' = \frac{-y^2 - xy\ ln\ y}{xy\ ln\ x + x^2}$$

$$y'(1, 1) = -1$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es:

$$y = 1 - (x - 1); \ \text{ es decir, } \ y = -x + 2$$

8 **Halla el punto de la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$ en el que la tangente forme un ángulo de 60° con el eje X. Escribe la ecuación de esa tangente.**

- Si forma un ángulo de 60° con el eje X, su pendiente es $tg\ 60° = \sqrt{3}$.
- Buscamos un punto en el que la derivada valga $\sqrt{3}$:

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \sqrt{3} \ \rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{3} \ \rightarrow \ 1 = 3x \ \rightarrow \ x = \frac{1}{3} \ \rightarrow \ y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

El punto es $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

- La recta tangente en ese punto será:

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) \ \rightarrow \ y = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} \ \rightarrow \ y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Máximos y mínimos. Puntos de inflexión

9 S **Halla los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ **b)** $y = \dfrac{x^3(3x-8)}{12}$ **c)** $y = x^4 - 2x^3$

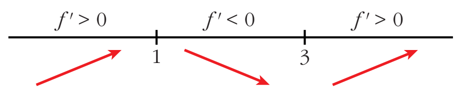
d) $y = x^4 + 2x^2$ **e)** $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **f)** $y = e^x(x-1)$

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 3 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 1 \;\rightarrow\; y = 4 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



Hay un mínimo en $(3, 0)$ y un máximo en $(1, 4)$.

Puntos de inflexión:

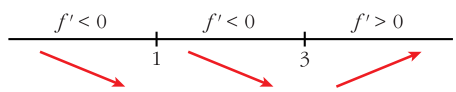
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \;\rightarrow\; y = 2$$

Como $f''(x) < 0$ para $x < 2$ y $f''(x) > 0$ para $x > 2$, el punto $(2, 2)$ es un punto de inflexión.

b) $y = \dfrac{3x^4 - 8x^3}{12}$

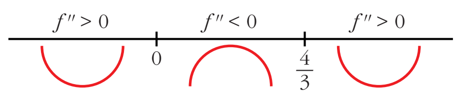
$$f'(x) = \frac{12x^3 - 24x^2}{12} = x^3 - 2x^2$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x-2) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 2 \;\rightarrow\; y = -(4/3) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(2, \dfrac{-4}{3}\right)$.

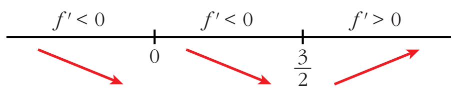
$$f''(x) = 3x^2 - 4x = 0 \;\rightarrow\; x(3x-4) = 0 \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \\ x = 4/3 \;\rightarrow\; y = -(64/81) \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{-64}{81}\right)$.

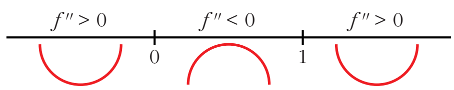
c) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2(4x - 6) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 3/2 \rightarrow y = -(27/16) \end{cases}$$



Hay un mínimo en $\left(\frac{3}{2}, \frac{-27}{16}\right)$.

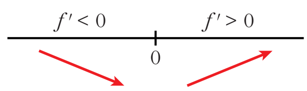
$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = 1 \rightarrow y = -1 \end{cases}$$



Hay un punto de inflexión en $(0, 0)$ y otro en $(1, -1)$.

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0$$



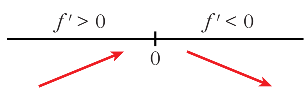
Hay un mínimo en $(0, 0)$.

$f''(x) = 12x^2 + 4 \neq 0$ para todo x.

No hay puntos de inflexión.

e) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

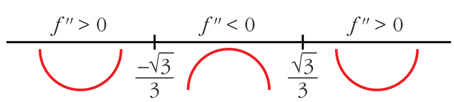
$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 1$$



Hay un máximo en $(0, 1)$.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 + 1)^2 + 2x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x = \pm \qquad = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

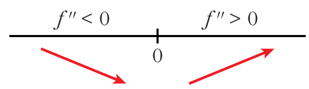


Hay un punto de inflexión en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$ y otro en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

f) $f'(x) = e^x(x-1) + e^x = e^x(x-1+1) = xe^x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; xe^x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$ (pues $e^x \neq 0$ para todo x)

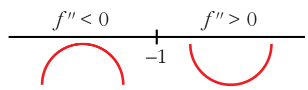
$y = -1$



Hay un mínimo en $(0, -1)$.

$f''(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; x = -1 \;\rightarrow\; y = \frac{-2}{e}$



Hay un punto de inflexión en $\left(-1, \frac{-2}{e}\right)$.

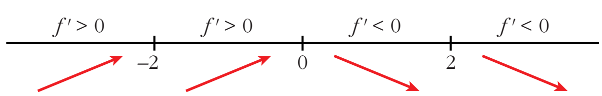
10 **S** **Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y di si tienen máximos o mínimos:**

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$ **b)** $y = \frac{2x-3}{x+1}$ **c)** $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ **d)** $y = \frac{x^2-1}{x}$

a) $y = \frac{1}{x^2-4}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Signo de la derivada:



La función: crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

decrece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

tiene un máximo en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 3)}{(x + 1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x + 3}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq -1$.

Por tanto, la función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

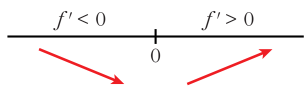
No tiene máximos ni mínimos.

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x \cdot x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) > 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$

Signo de la derivada:



La función: decrece en $(-\infty, 0)$

crece en $(0, +\infty)$

tiene un mínimo en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 - 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$f'(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$.

$f'(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.

La función es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No tiene máximos ni mínimos.

11 S **Halla los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{8 - 3x}{x(x - 2)}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$ **e)** $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ **f)** $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)}$

a) $y = \dfrac{8-3x}{x(x-2)} = \dfrac{8-3x}{x^2-2x}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{0, 2\}$

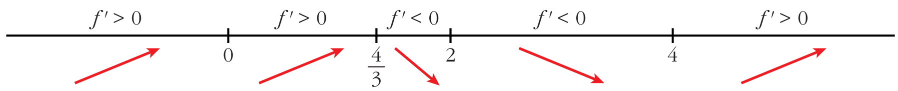
$$f'(x) = \frac{-3(x^2-2x)-(8-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-3x^2+6x-16x+16+6x^2-6x}{(x^2-2x)^2} =$$

$$= \frac{-3x^2-16x+16}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2-16x+16 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{16 \pm \sqrt{256-192}}{6} = \frac{16 \pm \sqrt{64}}{6} =$$

$$= \frac{16 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 4 \\ x = 4/3 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, 0) \cup \left(0, \dfrac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$

es decreciente en $\left(\dfrac{4}{3}, 2\right) \cup (2, 4)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{9}{2}\right)$

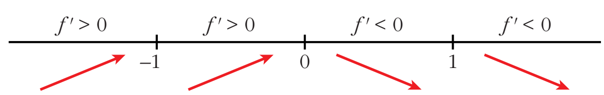
tiene un mínimo en $\left(4, -\dfrac{1}{2}\right)$

b) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$. *Dominio* $= \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -4x = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

es decreciente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

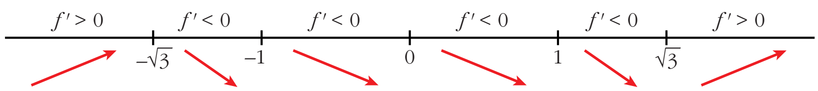
tiene un máximo en $(0, -1)$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2(x^2 - 3) = 0 \;\begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$

tiene un máximo en $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\sqrt{3}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$

d) $y = \dfrac{2x^2 - 3x}{2 - x}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{2\}$

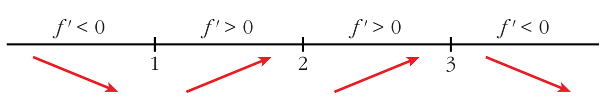
$$f'(x) = \frac{(4x - 3) \cdot (2 - x) - (2x^2 - 3x) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \frac{8x - 4x^2 - 6 + 3x + 2x^2 - 3x}{(2 - x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x - 6}{(2 - x)^2} = \frac{-2(x^2 - 4x + 3)}{(2 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 4x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm 2}{2} \;\begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

tiene un mínimo en $(1, -1)$

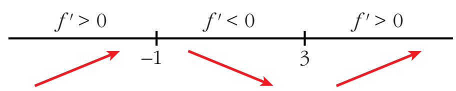
tiene un máximo en $(3, -9)$

e) $y = x^3 - 3x^2 - 9x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

es decreciente en $(-1, 3)$

tiene un máximo en $(-1, 5)$

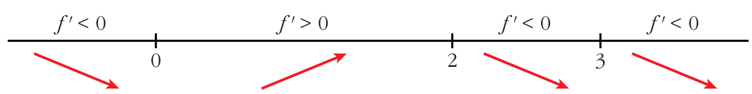
tiene un mínimo en $(3, -27)$

f) $y = \dfrac{8}{x^2(x - 3)} = \dfrac{8}{x^3 - 3x^2}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{0, 3\}$

$$f'(x) = \frac{-8(3x^2 - 6x)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8x(3x - 6)}{x^4(x - 3)^2} = \frac{-8(3x - 6)}{x^3(x - 3)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x - 6 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

Signo de la derivada:



La función: es creciente en $(0, 2)$

es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

tiene un máximo en $(2, -2)$

12 **S** **Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 3x + 4$ **b)** $y = x^4 - 6x^2$ **c)** $y = (x - 2)^4$

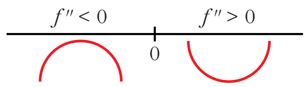
d) $y = x\,e^x$ **e)** $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$ **f)** $y = \ln(x + 1)$

a) $y = x^3 - 3x + 4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad 6x = 0 \quad \to \quad x = 0$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, 0)$

es cóncava en $(0, +\infty)$

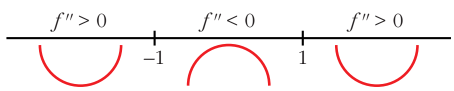
tiene un punto de inflexión en $(0, 4)$

b) $y = x^4 - 6x^2$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4x^3 - 12x$; $f''(x) = 12x^2 - 12$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad 12(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Signo de $f''(x)$:



La función: es cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

es convexa en $(-1, 1)$

tiene un punto de inflexión en $(-1, -5)$ y otro en $(1, -5)$

c) $y = (x - 2)^4$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = 4(x - 2)^3$; $f''(x) = 12(x - 2)^2$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad x = 2$

$f''(x) > 0$ para $x \neq 2$

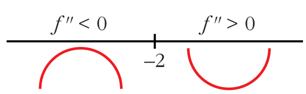
Por tanto, la función es cóncava. No tiene puntos de inflexión.

d) $y = x\,e^x$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$; $f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$

$f''(x) = 0 \quad \to \quad x = -2 \quad (e^x \neq 0$ para todo $x)$

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -2)$

es cóncava en $(-2, +\infty)$

tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\dfrac{2}{e^2}\right)$

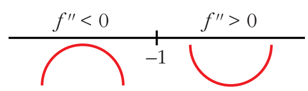
e) $y = \dfrac{2 - x}{x + 1}$. *Dominio* = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{-1(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-x - 1 - 2 + x}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6}{(x + 1)^3}$$

$f''(x) \neq 0$ para todo x.

Signo de $f''(x)$:



La función: es convexa en $(-\infty, -1)$

es cóncava en $(-1, +\infty)$

no tiene puntos de inflexión

f) $y = ln(x + 1)$. *Dominio* = $(-1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(x + 1)^2}$$

$f''(x) < 0$ para $x \in (-1, +\infty)$

Por tanto, la función es convexa en $(-1, +\infty)$.

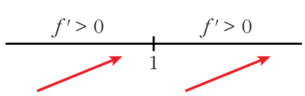
PARA RESOLVER

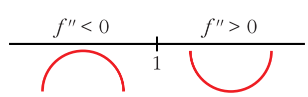
13 Estudia si las siguientes funciones tienen máximos, mínimos o puntos de inflexión en el punto de abscisa $x = 1$:

a) $y = 1 + (x - 1)^3$ **b) $y = 2 + (x - 1)^4$**

c) $y = 3 - (x - 1)^6$ **d) $y = -3 + 2(x - 1)^5$**

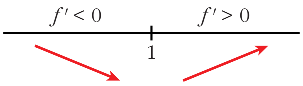
a) $f'(x) = 3(x - 1)^2$; $f''(x) = 6(x - 1)$



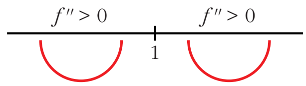


Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

b) $f'(x) = 4(x-1)^3$;

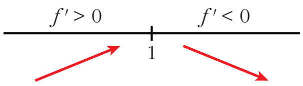


$f''(x) = 12(x-1)^2$

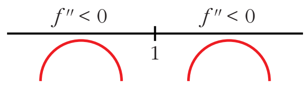


Hay un mínimo en $x = 1$.

c) $f'(x) = -6(x-1)^5$;

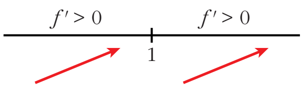


$f''(x) = -30(x-1)^4$

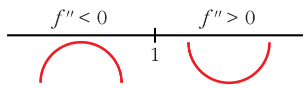


Hay un máximo en $x = 1$.

d) $f'(x) = 10(x-1)^4$;



$f''(x) = 40(x-1)^3$



Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

Página 298

14 **Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto $\left(3, \frac{1}{3}\right)$.**

Comprueba que el segmento de esa recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$; $f'(3) = \frac{-1}{9}$

- Ecuación de la recta tangente en $\left(3, \frac{1}{3}\right)$:

$$y = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3)$$

- Puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados:

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{2}{3} \;\rightarrow\; \text{Punto } \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; \text{Punto } (6, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} dist\left[\left(3, \frac{1}{3}\right), \left(0, \frac{2}{3}\right)\right] = (3-0)^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{82}}{3} \\ dist\left[\left(3, \frac{1}{3}\right), (6, 0)\right] = (6-3)^2 + \left(0 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{82}}{3} \end{array}\right\} \text{La distancia es la misma.}$$

15 **Dada la parábola $y = 3x^2$, encuentra un punto en el que la recta tangente a la curva en dicho punto sea paralela a la cuerda que une los puntos (0, 0) y (4, 48).**

- La cuerda que une los puntos (0, 0) y (4, 48) tiene pendiente:

$$m = \frac{48}{4} = 12$$

- Buscamos un punto de la función $y = 3x^2$ en el que la derivada valga 12:

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(x) = 12 \;\rightarrow\; 6x = 12 \;\rightarrow\; x = 2$$

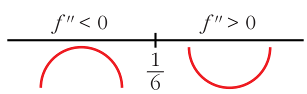
- El punto es (2, 12).

16 **S** **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4x^3 - 2x^2 - 10$ en su punto de inflexión.**

- Hallamos su punto de inflexión:

$$f'(x) = 12x^2 - 4x; \quad f''(x) = 24x - 4$$

$$f''(x) = 24x - 4 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1}{6}$$



Hay un punto de inflexión en $\left(\frac{1}{6}, -\frac{271}{27}\right)$.

- Pendiente de la recta tangente en ese punto: $f'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{3}$

- Ecuación de la recta tangente:

$$y = -\frac{271}{27} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

17 **Estudia los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de la función dada por: $y = |x^2 + 2x - 3|$**

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x < -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < -3 \\ -2x - 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En $x = -3$ no es derivable, pues $f'(-3^-) = -4 \neq f'(-3^+) = 4$.

En $x = 1$ no es derivable, pues $f'(1^-) = -4 \neq f'(1^+) = 4$.

- Veamos dónde se anula la derivada:

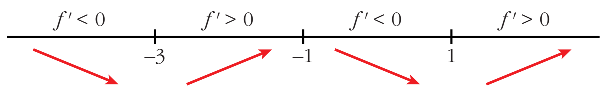
  $2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

  Pero $f'(x) = 2x + 2$ para $x < -3$ y $x > 1$.

  $-2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$ y $f'(x) = -2x - 2$ para $-3 < x < 1$

  Por tanto $f'(x)$ se anula en $x = -1$.

- Signo de la derivada:



- La función: es creciente en $(-3, -1) \cup (1, +\infty)$

  es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-1, 1)$

  tiene un máximo en $(-1, -4)$

  tiene un mínimo en $(-3, 0)$ y otro en $(1, 0)$.

18 **Estudia la existencia de máximos y mínimos relativos y absolutos de la función $y = |x^2 - 4|$.**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

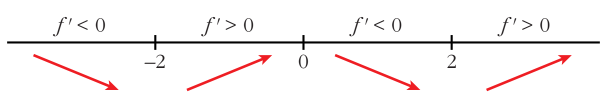
$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En $x = -2$ no es derivable, pues $f'(-2^-) = -4 \neq f'(-2^+) = 4$.

En $x = 2$ no es derivable, pues $f'(2^-) = -4 \neq f'(2^+) = 4$.

- La derivada se anula en $x = 0$.

- Signo de la derivada:



- La función tiene un máximo relativo en $(0, 4)$.

  No tiene máximo absoluto $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty\right)$.

- Tiene un mínimo relativo en $(-2, 0)$ y otro en $(2, 0)$. En estos puntos, el mínimo también es absoluto, puesto que $f(x) \ge 0$ para todo x.

19 **S** **Halla el valor de c de modo que la función $y = \dfrac{e^x}{x^2 + c}$ tenga un único extremo relativo.**

¿Se trata de un máximo o de un mínimo?

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + c) - e^x \cdot 2x}{(x^2 + c)^2} = \frac{e^x(x^2 + c - 2x)}{(x^2 + c)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x + c = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2}$$

Para que solo haya un extremo relativo, ha de ser: $4 - 4c = 0 \;\rightarrow\; c = 1$

En este caso sería:

$$y = \frac{e^x}{x^2 + 1}; \quad f'(x) = \frac{e^x(x + 1)^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

$f'(x) > 0$ si $x \neq 1 \;\rightarrow\; f(x)$ es creciente si $x \neq 1$.

Hay un punto de inflexión en $x = 1$.

20 **Estudia el crecimiento de la función:**

$$\boldsymbol{f(x) = e^x\,(\cos x + \operatorname{sen} x)}$$

y determina los máximos y mínimos de la función para $x \in [0, 2\pi]$.

Consideramos la función: $f(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$ para $x \in [0, 2\pi]$.

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = e^x(\cos x + \operatorname{sen} x) + e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) = e^x(2 \cos x) = 2e^x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \cos x = 0 \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\[2ex] x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \quad \left(\text{para } x \in [0, 2\pi]\right)$$

Signo de la derivada:

0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
	$f' > 0$ ↗		$f' < 0$ ↘		$f' > 0$ ↗	

La función: es creciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

es decreciente en $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\pi}{2}, e^{\pi/2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(\dfrac{3\pi}{2}, -e^{3\pi/2}\right)$

21 **Dada la función $y = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de a y b sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = 1/2$.**

$$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(1) = 0 \quad \to \quad 12a + 18b - 6 = 0 \\ f''(1/2) = 0 \quad \to \quad 3a + 9b - 6 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a + 3b - 1 = 0 \\ a + 3b - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Restando las igualdades: $a + 1 = 0 \quad \to \quad a = -1$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $3b - 3 = 0 \quad \to \quad b = 1$

22 **S** **Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$ y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.**

a) Halla a, b, c y d.

b) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

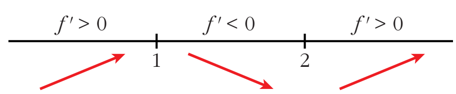
a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \to & a + b + c + d = 0 \\ f'(0) = 2 & \to & c = 2 \\ f'(1) = 0 & \to & 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 & \to & 12a + 4b + c = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a + b + d = -2 \\ c = 2 \\ 3a + 2b = -2 \\ 6a + 2b = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{-3}{2} \\ c = 2 \\ d = \dfrac{-5}{6} \end{array}$$

Así: $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x - \dfrac{5}{6}$; $\quad f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1) \cdot (x - 2)$

b) Signo de la derivada:



Hay un máximo para $x = 1$ y un mínimo para $x = 2$.

23 **S** **La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = -1$ y tiene un punto de inflexión en $(2, 1)$. Calcula a, b y c.**

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
f(-1)=0 & \to & -1+a-b+c=0 \\
f(2)=1 & \to & 8+4a+2b+c=1 \\
f''(2)=0 & \to & 12+2a=0
\end{array}\right\}
\left.\begin{array}{l}
a-b+c=1 \\
4a+2b+c=-7 \\
a=-6
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
a=-6 \\
b=\dfrac{10}{3} \\
c=\dfrac{31}{3}
\end{array}
$$

24 **De la función $f(x) = ax^3 + bx$ sabemos que pasa por (1, 1) y en ese punto tiene tangente paralela a la recta $3x + y = 0$.**

a) Halla a y b.

b) Determina sus extremos relativos y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

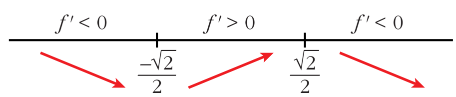
a) $f(x) = ax^3 + bx$; $f'(x) = 3ax^2 + b$

$$
\left.\begin{array}{lll}
f(1)=1 & \to & a+b=1 \\
f'(1)=-3 & \to & 3a+b=-3
\end{array}\right\}
\left.\begin{array}{l}
a=-2 \\
b=3
\end{array}\right\}
f(x)=-2x^3+3x
$$

b) $f'(x) = -6x^2 + 3$

$$
f'(x)=0 \ \to\ -3(2x^2-1)=0 \ \begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}
$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

es creciente en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

tiene un mínimo en $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$

tiene un máximo en $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$

25 **La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y que f no tiene extremo relativo en $x = 1$. Calcula a, b y c.**

☞ ***Si es $f'(1) = 0$ y no hay extremo relativo, tiene que haber una inflexión en $x = 1$.***

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 1 & \rightarrow & 1 + a + b + c = 1 \\ f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \\ c = 0 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$$

26 **S** **Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

Si en $x = 1$ tiene un punto de inflexión con tangente horizontal, ha de ser $f'(1) = f''(1) = 0$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\left.\begin{array}{lll} f'(1) = 0 & \rightarrow & 3 + 2a + b = 0 \\ f''(1) = 0 & \rightarrow & 6 + 2a = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = 3 \end{array}\right\} f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$$

27 **S** **La curva $y = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ corta al eje OX en $x = 1$ y tiene un punto de inflexión en (3, 2). Calcula los puntos de la curva que tengan recta tangente paralela al eje OX.**

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$; $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$; $f''(x) = 6x + 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{lll} f(1) = 0 & \rightarrow & 1 + \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ f(3) = 2 & \rightarrow & 27 + 9\alpha + 3\beta + \gamma = 2 \\ f''(3) = 0 & \rightarrow & 18 + 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \beta = 24 \\ \gamma = -16 \end{array}$$

Así: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$; $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

- Puntos con tangente horizontal:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{36}}{6} = \frac{18 \pm 6}{6} \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 2 \end{array}$$

- Los puntos son (4, 0) y (2, 4).

28 **Halla los puntos de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x - 4$**

en los que la recta tangente a esta pase por el punto (0, –8). Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes.

☛ ***La ecuación de la tangente es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, donde $f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ y $f'(a) = \frac{1}{2}a + 4$.***

Sustituye en la ecuación de la tangente y haz que esta pase por (0, –8).

La ecuación de la tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Como $f(a) = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4$ y $f'(a) = \frac{1}{2}a + 4$, queda:

$$y = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(x - a)$$

Si la recta tangente pasa por $(0, -8)$:

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + 4a - 4 + \left(\frac{1}{2}a + 4\right)(-a)$$

$$-8 = \frac{1}{4}a^2 + \cancel{4a} - 4 - \frac{1}{2}a^2 - \cancel{4a}$$

$$-4 = -\frac{1}{4}a^2 \quad \to \quad -16 = -a^2 \quad \to \quad a^2 = 16 \begin{cases} a = -4 \\ a = 4 \end{cases}$$

- Hay dos puntos: $(-4, -16)$ y $(4, 16)$

- Recta tangente en $(-4, -16)$: $f'(-4) = 2$

$$y = -16 + 2(x + 4) \quad \to \quad y = 2x - 8$$

- Recta tangente en $(4, 16)$: $f'(4) = 6$

$$y = 16 + 6(x + 4) \quad \to \quad y = 6x - 8$$

29 S Halla los puntos de la curva $y = 3x^2 - 5x + 12$ en los que la recta tangente a ella pase por el origen de coordenadas. Escribe las ecuaciones de dichas tangentes.

$$y = 3x^2 - 5x + 12; \quad f'(x) = 6x - 5$$

- La recta tangente en un punto $(a, f(a))$ es:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a); \text{ es decir:}$$

$$y = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (x - a)$$

- Para que pase por el origen de coordenadas, ha de ser:

$$0 = 3a^2 - 5a + 12 + (6a - 5) \cdot (-a)$$

$$0 = 3a^2 - \cancel{5a} + 12 - 6a^2 + \cancel{5a}$$

$$3a^2 = 12 \quad \to \quad a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Hay dos puntos: $(-2, 34)$ y $(2, 14)$

- Recta tangente en $(-2, 34)$: $f'(-2) = -17$

$$y = 34 - 17(x + 2) \quad \to \quad y = -17x$$

- Recta tangente en $(2, 14)$: $f'(2) = 7$

$$y = 14 + 7(x - 2) \quad \to \quad y = 7x$$

30 **S** **Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 4$:**

a) Halla la ecuación de la recta tangente a f en un punto cualquiera $x = a$.

b) Halla el valor o valores de a para que dicha recta pase por el punto $P(0, 0)$ (exterior a la curva).

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $f'(x) = 2x - 3$

La recta tangente en $x = a$ es:

$y = f(a) + f'(a)(x - a)$; es decir:

$y = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (x - a)$

b) Para que la recta pase por $(0, 0)$ será:

$0 = a^2 - 3a + 4 + (2a - 3) \cdot (-a)$

$0 = a^2 - \cancel{3a} + 4 - 2a^2 + \cancel{3a}$

$$a^2 = 4 \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases}$$

Página 299

31 **Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el punto de abscisa 2:**

$$f(x) = 2x - x^2 \qquad g(x) = x^2 - x - 2$$

Recuerda que el ángulo de dos rectas se puede calcular así: $tg\ \alpha = \left| \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$, ***donde m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas.***

• La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ es:

$f'(x) = 2 - 2x \rightarrow f'(2) = -2$

• La pendiente de la recta tangente a $g(x)$ en $x = 2$ es:

$g'(x) = 2x - 1 \rightarrow g'(2) = 3$

• El ángulo que forman las dos rectas será:

$$tg\ \alpha = \left| \frac{-2 - 3}{1 - 6} \right| = 1 \rightarrow \alpha = 45°$$

32 **Halla el dominio de definición, máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:**

a) $y = x^2 \ln x$ **b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$**

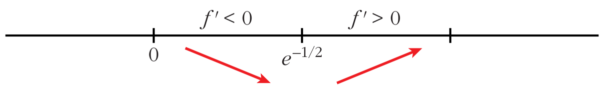
a) $y = x^2 \ln x$. *Dominio* $= (0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$$

$f'(x) = 0 \quad \to \quad x(2\ ln\ x + 1) = 0$

$$\begin{cases} x = 0 \quad \text{(no vale, pues no está en el dominio)} \\ 2\ ln\ x + 1 = 0 \quad \to \quad ln\ x = -\dfrac{1}{2} \quad \to \quad x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $(0, e^{-1/2})$

es creciente en $(e^{-1/2}, +\infty)$

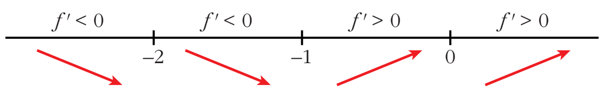
tiene un mínimo en $\left(e^{-1/2}, \dfrac{-1}{2e}\right)$

b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$. *Dominio* = $\mathbb{R}$

$f'(x) = \dfrac{2x + 2}{3\sqrt[3]{(x^2 + 2x)^2}}$ (La función no es derivable en $x = 0$ ni en $x = -2$).

$f'(x) = 0 \quad \to \quad 2x + 2 = 0 \quad \to \quad x = -1$

Signo de la derivada:



La función: es decreciente en $(-\infty, -1)$

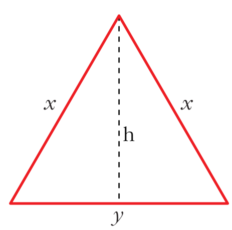
es creciente en $(-1, +\infty)$

tiene un mínimo en $(-1, -1)$

33 **S** **Entre todos los triángulos isósceles de perímetro 30 cm, ¿cuál es el de área máxima?**

Perímetro $= 2x + y = 30 \quad \to \quad y = 30 - 2x$

Altura = h =



$$\text{Área} = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{x^2 - \dfrac{(3c - 2x)^2}{4}}}{2} =$$

$$= \frac{(30 - 2x) \cdot \sqrt{30x - 225}}{2} = (15 - x)\sqrt{30x - 225} = \sqrt{(15 - x)^2(30x - 225)} =$$

$$= \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

Tenemos que maximizar la función área:

$$f(x) = \sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}$$

$$f'(x) = \frac{90x^2 - 2\,250x + 13\,500}{2\sqrt{30x^3 - 1\,125x^2 + 13\,500x - 50\,625}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 90x^2 - 2\,250x + 13\,500 = 0$$

$$90(x^2 - 25x + 150) = 0$$

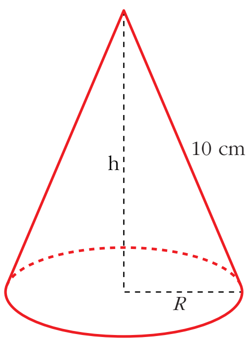
$$x = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 600}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{25 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 15 \quad \text{(no vale)} \\ x = 10 \end{cases}$$

($x = 15$ no vale, pues quedaría $y = 0$, al ser perímetro = 30)

($f'(x) > 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $f'(x) < 0$ a la derecha de $x = 10$. Por tanto, en $x = 10$ hay un máximo).

Luego, el triángulo de área máxima es el equilátero de lado 10 cm, cuya área es $25\sqrt{3} \approx 43{,}3$ cm^2.

34 **Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz 10 cm y de capacidad máxima. ¿Cuál debe ser el radio de la base?**



$$h^2 + R^2 = 100 \quad \rightarrow \quad R^2 = 100 - h^2$$

$$Volumen = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(100 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

Tenemos que maximizar la función volumen:

$$f(h) = \frac{1}{3}\pi(100h - h^3)$$

$$f'(h) = \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2)$$

$$f'(h) = 0 \quad \rightarrow \quad 100 - 3h^2 = 0 \quad \rightarrow \quad h =$$

(consideramos la raíz positiva, pues $h \geq 0$).

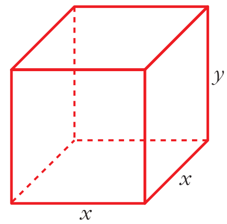
($f'(h) > 0$ a la izquierda de $h =$ y $f'(h) < 0$ a la derecha de $h =$.

Luego, en $h =$ hay un máximo).

Por tanto, el radio de la base será:

$$R^2 = 100 - h^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \quad \rightarrow \quad R =$$

35 **S** **Se desea construir una caja cerrada de base cuadrada cuya capacidad sea 8 dm³. Averigua las dimensiones de la caja para que su superficie exterior sea mínima.**



$$Volumen = x^2y = 8 \text{ dm}^3 \quad \to \quad y = \frac{8}{x^2}$$

$$Superficie = 4xy + 2x^2 = 4x\frac{8}{x^2} + 2x^2 = \frac{32}{x} + 2x^2$$

Tenemos que hallar el mínimo de la función superficie:

$$f(x) = \frac{32}{x} + 2x^2 \quad \to \quad f'(x) = \frac{-32}{x^2} + 4x = \frac{-32 + 4x^3}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \to \quad -32 + 4x^3 = 0 \quad \to \quad x^3 = 8 \quad \to \quad x = 2 \quad \to \quad y = 2$$

(En $x = 2$ hay un mínimo, pues $f'(x) < 0$ para $x < 2$ y $f'(x) > 0$ para $x > 2$).

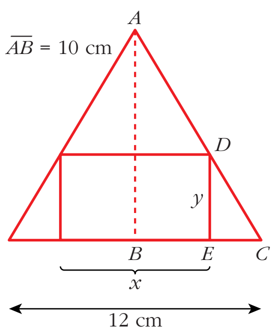
Por tanto, la caja ha de ser un cubo de lado 2 dm.

36 **S** **En un triángulo isósceles de base 12 cm (el lado desigual) y altura 10 cm, se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus lados esté sobre la base del triángulo y dos de sus vértices sobre los lados iguales:**

a) Expresa el área, A, del rectángulo en función de la longitud de su base, x, y di cuál es el dominio de la función.

b) Halla el valor máximo de esa función.

a)



Los triángulos $\widehat{ABC}$ y $\widehat{DEC}$ son semejantes; luego:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

Como $\overline{AB} = 10$ cm $\qquad \overline{DE} = y$

$\overline{BC} = 6$ cm $\qquad \overline{EC} = \dfrac{12 - x}{2}$

tenemos que:

$$\frac{10}{y} = \frac{6}{\frac{12 - x}{2}} \quad \to \quad \frac{10}{y} = \frac{12}{12 - x}$$

$$10(12 - x) = 12y \quad \to \quad y = \frac{10(12 - x)}{12} = \frac{5(12 - x)}{6} = \frac{60 - 5x}{6}$$

Por tanto, el área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y = x \cdot \frac{(60 - 5x)}{6} = \frac{60x - 5x^2}{6} \quad \to \quad A(x) = \frac{60x - 5x^2}{6}$$

x puede tomar valores entre 0 y 12. Por tanto, el dominio de $A(x)$ es:

$Dominio = (0, 12)$

b) Hallamos el máximo de $A(x)$:

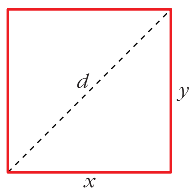
$$A'(x) = \frac{60 - 10x}{6}$$

$$A'(x) = 0 \;\rightarrow\; 60 - 10x = 0 \;\rightarrow\; x = 6 \;\rightarrow\; y = 5$$

(En $x = 6$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ para $x < 6$ y $A'(x) < 0$ para $x > 6$).

El máximo de la función $A(x)$ se alcanza en $x = 6$, que corresponde al rectángulo de base 6 cm y altura 5 cm. En este caso, el área es de 30 cm^2 (que es el área máxima).

37 S **De todos los rectángulos de área 100 dm^2, halla las dimensiones del que tenga la diagonal mínima.**



$Área = x \cdot y = 100 \text{ dm}^2 \;\rightarrow\; y = \dfrac{100}{x}$

La diagonal mide:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \qquad\qquad =$$

Tenemos que minimizar la función:

$$d(x) =$$

$$d'(x) = \frac{2x - \dfrac{20\,000}{x^3}}{2\sqrt{x^2 + \dfrac{10\,000}{x^2}}} = \frac{2x^4 - 20\,000}{2x^3\,\dfrac{\sqrt{x^4 + 10\,000}}{x}} = \frac{x^4 - 10\,000}{x^2\sqrt{x^4 + 10\,000}}$$

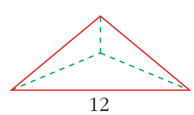
$$d'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^4 - 10\,000 = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt[4]{10\,000} = 10 \;\rightarrow\; x = 10 \;\rightarrow\; y = 10$$

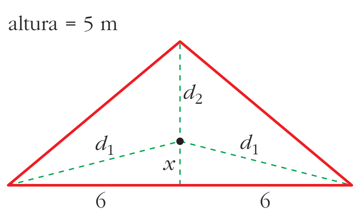
(En $x = 10$ hay un mínimo, pues $d'(x) < 0$ a la izquierda de $x = 10$ y $d'(x) > 0$ a la derecha de $x = 10$).

Por tanto, la diagonal mínima corresponde al cuadrado de lado 10 dm.

38 **Un triángulo isósceles tiene el lado desigual de 12 m y la altura relativa a ese lado de 5 m.**

Encuentra un punto sobre la altura tal que la suma de distancias a los tres vértices sea mínima.





La suma de las distancias a los tres vértices es:

$$S = 2d_1 + d_2$$

Pero: $d_1 = \sqrt{x^2 + 36}$ y $d_2 = 5 - x$

Por tanto:

$$S(x) = 2\sqrt{x^2 + 36} + 5 - x$$

Tenemos que minimizar la función $S(x)$:

$$S'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{}$$

$$S'(x) = 0 \rightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 36} = 0 \rightarrow 2x = \sqrt{x^2 + 36}$$

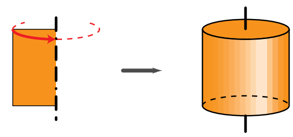
$$4x^2 = x^2 + 36 \rightarrow 3x^2 = 36 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

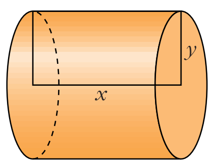
(consideramos solo la raíz positiva, pues $x \geq 0$).

(En $x = 2\sqrt{3}$ hay un mínimo, pues $S'(x) < 0$ a la izquierda de este valor y $S'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto buscado se encuentra a $2\sqrt{3}$ m de la base, situado sobre la altura.

39 **Halla la base y la altura de una cartulina rectangular de perímetro 60 cm que, al dar la vuelta completa alrededor de un lado vertical, genere un cilindro de volumen máximo.**





$$\textit{Perímetro cartulina} = 2x + 2y = 60 \rightarrow x + y = 30 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 30 - y$$

$$\textit{Volumen} = \pi y^2 x = \pi y^2 (30 - y) = \pi (30y^2 - y^3)$$

Tenemos que maximizar la función:

$$V(y) = \pi(30y^2 - y^3)$$

$$V'(y) = \pi(60y - 3y^2)$$

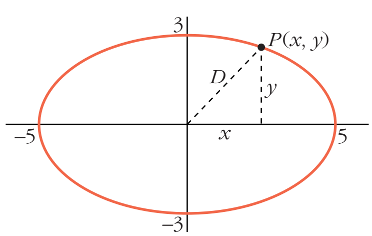
$$V'(y) = 60y - 3y^2 = 0 \rightarrow 3y(20 - y) = 0 \begin{cases} y = 0 \text{ (no vale)} \\ y = 20 \rightarrow x = 10 \end{cases}$$

(En $y = 20$ hay un máximo, pues $V'(y) > 0$ a la izquierda de este valor y $V'(y) < 0$ a su derecha).

Los lados de la cartulina medirán 20 cm y 10 cm.

40 **S** **El punto $P(x, y)$ recorre la elipse de ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$**

Deduce las posiciones del punto P para las que su distancia al punto (0, 0) es máxima y también aquellas para las que su distancia es mínima.



La distancia de P a $(0, 0)$ es:

$$D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Como P es un punto de la elipse:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow y^2 = 9\left(1 - \frac{x^2}{25}\right)$$

Así, la distancia es:

$$D(x) = \qquad = \qquad = \frac{\sqrt{16x^2 + 225}}{5}$$

El dominio de la función es el intervalo $[-5, 5]$.

Hallamos el máximo y el mínimo de $D(x)$:

$$D'(x) = \frac{32x}{10\sqrt{16x^2 + 225}}$$

$$D'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

(En $x = 0$ hay un mínimo relativo, pues $D'(x) < 0$ para $x < 0$ y $D'(x) > 0$ para $x > 0$).

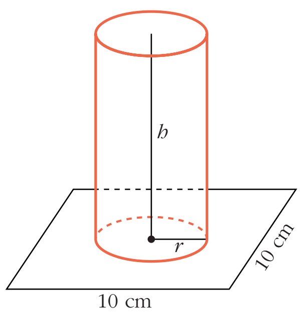
Veamos el valor de $D(x)$ en $x = 0$ y en los extremos del intervalo $[-5, 5]$:

$$D(0) = 3; \quad D(-5) = D(5) = 5$$

Por tanto, las posiciones de P que nos dan la distancia máxima son $P(5, 0)$ y $P(-5, 0)$; y las que nos dan la distancia mínima son $P(0, 3)$ y $P(0, -3)$.

41 S **En un cuadrado de lado 10 cm queremos apoyar la base de un cilindro cuya área lateral es 50 cm².**

¿Cuál debe ser el radio del cilindro para que su volumen sea el mayor posible?



Área lateral cilindro $= 2\pi r\text{h} = 50 \text{ cm}^2 \quad \rightarrow \quad \text{h} = \dfrac{50}{2\pi r}$

El volumen del cilindro es:

$$V = \pi r^2\text{h} = \pi r^2 \cdot \frac{50}{2\pi r} = 25r \quad \rightarrow \quad V(r) = 25r$$

Al estar apoyada la base sobre el cuadrado, tenemos que el dominio de $V(r)$ es el intervalo $(0, 5]$.

Tenemos que maximizar $V(r) = 25r$, con $r \in (0, 5]$.

Como $V(r)$ es una función creciente, su máximo se alcanza en $r = 5$.

42 S **Dada la función $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determina cuáles de las rectas tangentes a la gráfica de f tienen la máxima pendiente.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en $x = a$ es $f'(a)$. Tenemos que hallar el máximo de:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e]$$

Calculamos la derivada de $f'(x)$; es decir, $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{2-x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\rightarrow\; 2 - x = 0 \;\rightarrow\; x = 2 \in [1, e]$$

(En $x = 2$ hay un máximo relativo de $f'(x)$, pues $f''(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $f''(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos $f'(x)$ en $x = 2$ y en los extremos del intervalo $[1, e]$:

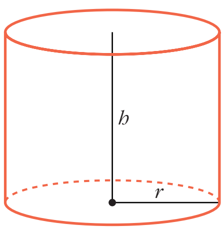
$$f'(2) = \frac{1}{4} = 0{,}25; \quad f'(1) = 0; \quad f'(e) = \frac{e-1}{e^2} \approx 0{,}23$$

Por tanto, la recta tangente con pendiente máxima es la recta tangente en $x = 2$. La hallamos:

$$f(2) = \frac{1}{2} + ln\ 2; \quad f'(2) = \frac{1}{4}$$

La recta es: $y = \frac{1}{2} + ln\ 2 + \frac{1}{4}(x-2)$

43
S **Se desea construir un depósito de latón con forma de cilindro de área total 54 cm². Determina el radio de la base y la altura del cilindro para que el volumen sea máximo.**



Área total $= 2\pi r\text{h} + 2\pi r^2 = 54$ cm²

$$\text{h} = \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

Volumen $= \pi r^2\text{h} = \pi r^2 \cdot \frac{54 - 2\pi r^2}{2\pi r} = r(27 - \pi r^2) = 27r - \pi r^3$

Tenemos que maximizar la función $V(r) = 27r - \pi r^3$:

$$V'(r) = 27 - 3\pi r^2$$

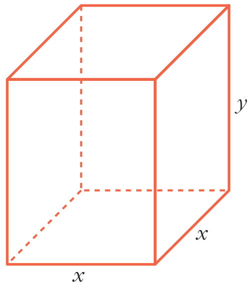
$$V'(r) = 0 \;\rightarrow\; 27 - 3\pi r^2 = 0 \;\rightarrow\; r^2 = \frac{27}{3\pi} = \frac{9}{\pi} \;\rightarrow\; r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

(En $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ hay un mínimo, pues $V'(r) < 0$ a la izquierda de este valor y $V'(r) > 0$ a su derecha).

Para $r = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \;\rightarrow\; \text{h} = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$, dimensiones del cilindro de volumen máximo.

44 **Queremos hacer un envase con forma de prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50% más caro.**

Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.



$Volumen = x^2 y = 80 \text{ cm}^3 \;\rightarrow\; y = \dfrac{80}{x^2}$

Para la tapa y el lateral $\rightarrow$ z €/cm^2

Para la base $\rightarrow$ $1{,}5z$ €/cm^2

El precio total será:

$$P = z(x^2 + 4xy) + 1{,}5z(x^2) = z\left(x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2}\right) + 1{,}5x^2 z =$$

$$= z\left(x^2 + \frac{320}{x}\right) + 1{,}5x^2 z = z\left(x^2 + \frac{320}{x} + 1{,}5x^2\right) =$$

$$= z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

Tenemos que minimizar la función que nos da el precio:

$$P(x) = z\left(2{,}5x^2 + \frac{320}{x}\right)$$

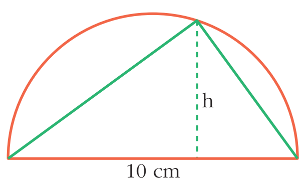
$$P'(x) = z\left(5x - \frac{320}{x^2}\right) = z\left(\frac{5x^3 - 320}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \;\rightarrow\; 5x^3 - 320 = 0 \;\rightarrow\; x^3 = 64 \;\rightarrow\; x = 4 \;\rightarrow\; y = 5$$

(En $x = 4$ hay un mínimo, pues $P'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $P'(x) > 0$ a su derecha).

El envase debe tener la base cuadrada de lado 4 cm y 5 cm de altura.

45 S **Entre todos los triángulos inscritos en una semicircunferencia de 10 cm de diámetro, ¿cuál es el de área máxima?**



La base mide 10 cm. El área es:

$Área = \dfrac{10 \cdot h}{2} = 5h; \quad h \in (0, 5].$

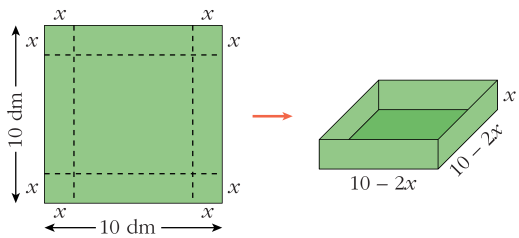
El de área máxima será el que tenga la máxima altura; es decir, $h = 5$ cm. Su área es 25 cm^2.

Página 300

46 **Con una lámina cuadrada de 10 dm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recortan unos cuadrados de los vértices.**

Calcula el lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.

Si la altura de la caja no puede pasar de 2 dm, ¿cuál es la medida del lado del cuadrado que debemos recortar?



El volumen de la caja es:

$V(x) = x(10 - 2x)^2, \quad x \in (0, 5)$

Tenemos que maximizar esta función:

$$V(x) = x(10 - 2x)^2 = x(100 + 4x^2 - 40x) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$$

$$V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$$

$$V'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 300}}{6} = \frac{20 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} \begin{cases} x = 5 \quad (\text{no vale}) \\ x = 5/3 \end{cases}$$

(En $x = 5/3$ hay un máximo, pues la derivada es positiva a la izquierda de este valor y es negativa a su derecha).

Por tanto, el lado del cuadradito es $x = 5/3$.

Si la altura no puede pasar de 2 dm; es decir, si $x \in (0, 2)$, obtenemos el mismo resultado: $x = 5/3$.

47 Dado $r > 0$, prueba que entre todos los números positivos x e y tales que $x^2 + y^2 = r$, la suma $x + y$ es máxima cuando $x = y$.

Como $x^2 + y^2 = r$ y nos dicen que $y > 0$, entonces: $y = \sqrt{r - x^2}$

Así, la suma es: $S = x + y = x + \sqrt{r - x^2}$

Tenemos que maximizar la función $S(x) = x + \sqrt{r - x^2}$:

$$S'(x) = 1 + \frac{-2x}{2\sqrt{r - x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{r - x^2}} = \frac{\sqrt{r - x^2} - x}{\phantom{\sqrt{r - x^2}}}$$

$$S'(x) = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r - x^2} = x \;\rightarrow\; r - x^2 = x^2 \;\rightarrow\; r = 2x^2 \;\rightarrow\; x^2 = \frac{r}{2}$$

Como $x > 0 \;\rightarrow\; x =$

(En $x =$ hay un máximo, pues $S'(x) > 0$ a la izquierda de ese valor y $S'(x) < 0$ a su derecha).

Hallamos y: $y = \sqrt{r - x^2} = \quad =$

Por tanto, la suma es máxima cuando $x = y =$.

48 **El valor, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t viene dado por $f(t) = 9 - (t-2)^2$, $0 \leq t \leq 4{,}5$.**

Deduce en qué valor de t alcanzó su máximo valor y en qué valor de t alcanzó su valor mínimo.

Derivamos la función $f(t)$:

$$f'(t) = -2(t-2)$$

Los puntos críticos son:

$$f'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad -2(t-2) = 0 \quad \rightarrow \quad t - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = 2$$

La función f tiene un punto crítico en $(2, 9)$.

$$f''(t) = -2$$

$$f''(t) = -2 < 0 \quad \rightarrow \quad (2, 9) \text{ es un máximo.}$$

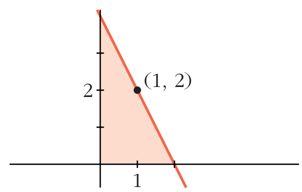
Además, como la función es una parábola con las ramas hacia abajo, el mínimo se alcanzará en uno de los extremos del intervalo:

$$f(0) = 5$$

$$f(4{,}5) = 2{,}75 \quad \rightarrow \quad (4{,}5;\ 2{,}75) \text{ es un mínimo.}$$

Por tanto, el máximo se alcanza para $t = 2$ y el mínimo para $t = 4{,}5$.

49 **De todas las rectas que pasan por el punto (1, 2), encuentra la que determina con los ejes de coordenadas, y en el primer cuadrante, un triángulo de área mínima.**



Las rectas que pasan por el punto $(1, 2)$ son de la forma:

$$y = 2 + m(x-1)$$

Hallamos los puntos de corte con los ejes de la recta:

— Con el eje Y $\rightarrow$ $x = 0$ $\rightarrow$ $y = 2 - m$ $\rightarrow$ Punto $(0, 2-m)$

— Con el eje X $\rightarrow$ $y = 0$ $\rightarrow$ $x = 1 - \dfrac{2}{m}$ $\rightarrow$ Punto $\left(1 - \dfrac{2}{m}, 0\right)$

El área del triángulo es:

$$A(m) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{m}\right)(2-m) = \frac{1}{2}\left(2 - m - \frac{4}{m} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(4 - m - \frac{4}{m}\right)$$

Hallamos el mínimo de la función:

$$A'(m) = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{4}{m^2}\right) = \frac{-m^2 + 4}{2m^2}$$

$$A'(m) = 0 \quad \rightarrow \quad -m^2 + 4 = 0 \begin{cases} m = 2 \ \text{(no vale)} \\ m = -2 \end{cases}$$

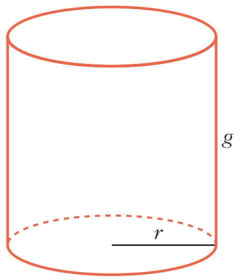
($m = 2$ no vale, pues no formará un triángulo en el primer cuadrante la recta con los ejes).

(En $m = -2$ hay un mínimo, pues $A'(m) < 0$ a la izquierda de ese valor y $A'(m) > 0$ a su derecha).

Por tanto, la recta es:

$$y = 2 - 2(x - 1); \text{ es decir: } y = -2x + 4$$

50 **Calcula la generatriz y el radio que debe tener un bote cilíndrico de leche condensada, cuya área total (incluyendo las dos tapas) es de 150 cm^2, para que su volumen sea máximo.**



$$\textit{Área total} = 2\pi rg + 2\pi r^2 = 150 \text{ cm}^2$$

$$g = \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\textit{Volumen} = \pi r^2 g = \pi r^2 \cdot \frac{150 - 2\pi r^2}{2\pi r} = 75r - \pi r^3$$

Tenemos que maximizar el volumen:

$$V(r) = 75r - \pi r^3; \quad V'(r) = 75 - 3\pi r^2$$

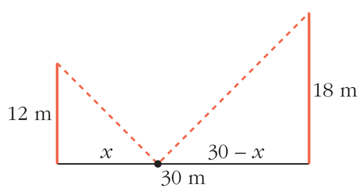
$$V'(r) = 0 \;\rightarrow\; 75 - 3\pi r^2 = 0 \;\rightarrow\; r = \qquad = \qquad = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$$

(Solo consideramos la raíz positiva, pues $r > 0$).

(En $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ hay un máximo, pues $V'(r) > 0$ a la izquierda de ese valor y $V'(r) < 0$ a su derecha).

Por tanto: $r = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ y $g = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$

51 **Dos postes de 12 y 18 m de altura distan entre sí 30 m. Se desea tender un cable que una un punto del suelo entre los dos postes con los extremos de estos. ¿Dónde hay que situar el punto del suelo para que la longitud total del cable sea mínima?**



La longitud total del cable es:

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 12^2} + \sqrt{(30 - x)^2 + 18^2}; \text{ es decir:}$$

$$L(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}$$

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{2x - 60}{2\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144}}{\sqrt{(x^2 + 144)(x^2 - 60x + 1\,224)}}$$

$L'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} + (x - 30)\sqrt{x^2 + 144} = 0$

$x\sqrt{x^2 - 60x + 1\,224} = -(x - 30)\sqrt{x^2 + 144}$

$x^2(x^2 - 60x + 1\,224) = (x - 30)^2(x^2 + 144)$

$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = (x^2 - 60x + 900)(x^2 + 144)$

$x^4 - 60x^3 + 1\,224x^2 = x^4 + 144x^2 - 60x^3 - 8\,640x + 900x^2 + 129\,600$

$180x^2 + 8\,640x - 129\,600 = 0$

$x^2 + 48x - 720 = 0$

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{2\,304 + 2\,880}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{5\,184}}{2} = \frac{-48 \pm 72}{2} \begin{cases} x = 12 \\ x = -60 \quad \text{(no vale)} \end{cases}$$

(En $x = 12$ hay un mínimo, pues $L'(x) < 0$ a la izquierda de ese valor y $L'(x) > 0$ a su derecha).

Por tanto, el punto del suelo debe situarse a 12 m del poste de 12 m (y a 18 m del poste de 18 m).

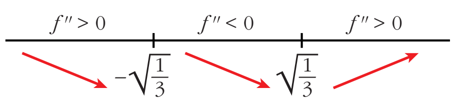
52 **Calcula el punto de la curva $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en el que la pendiente de la recta tangente sea máxima.**

La pendiente de la recta tangente a $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ en x es $f'(x)$. Tenemos que hallar el máximo de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 + 2x \cdot 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \pm$



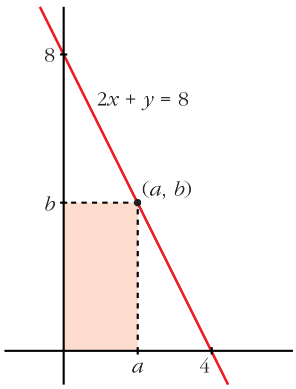
$\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

En $x = -$ hay un máximo (absoluto) de $f'(x)$ y en $x =$ hay un mínimo (absoluto) de $f'(x)$.

Por tanto, el punto en el que la pendiente de la recta tangente es máxima es:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

53 **S** **Dentro del triángulo limitado por los ejes OX y OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(a, 0), (0, 0), (a, b)$ y $(0, b)$. Determina el punto (a, b) al que corresponde el rectángulo de área máxima.**



- El punto (a, b) es un punto de la recta $2x + y = 8$. Por tanto, $2a + b = 8$; es decir, $b = 8 - 2a$.
- Como el rectángulo está inscrito en el triángulo, $a \in (0, 4)$.
- El área del rectángulo es:

  $Área = a \cdot b = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2, \; a \in (0, 4)$
- Tenemos que maximizar la función:

  $A(a) = 8a - 2a^2, \; a \in (0, 4)$

  $A'(a) = 8 - 4a = 0 \;\rightarrow\; a = 2 \;\rightarrow\; b = 4$

(En $a = 2$ hay un máximo, pues $A'(a) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(a) < 0$ a su derecha).

- Por tanto, el punto es $(2, 4)$.

54 **S** **Calcula, utilizando la regla de L'Hôpital, los siguientes límites, que son del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(e^x + x^3)}{x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\, x}{1 - cos\, x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{arctg\, x - x}{x - sen\, x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{sen\, x}}{1 - cos\, x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(cos\, 3x)}{x^2}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}}$ **i)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos^2(2x)}{3x^2}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - sen\, x}{x\, sen\, x}\right)$

a) $$\lim \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x - 4} = \lim \frac{3x^2}{2x - 3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

b) $$\lim \frac{ln(e^x + x^3)}{x} = \lim \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$$

c) $$\lim \frac{sen\, x}{1 - cos\, x} = \lim \frac{cos\, x}{sen\, x}$$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim \frac{cos\, x}{sen\, x} = -\infty; \quad \lim \frac{cos\, x}{sen\, x} = +\infty$$

d) $\lim \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lim \dfrac{a^x \ln a - b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b}$

e) $\lim \dfrac{\text{arctg } x - x}{x - \text{sen } x} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim \dfrac{\dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}}{\text{sen } x} = \lim \dfrac{\dfrac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}}{\cos x} = -2$

f) $\lim \dfrac{e^x - e^{\text{sen } x}}{1 - \cos x} = \lim \dfrac{e^x - e^{\text{sen } x} \cdot \cos x}{\text{sen } x} =$

$= \lim \dfrac{e^x - e^{\text{sen } x} \cos^2 x + e^{\text{sen } x} \text{sen } x}{\cos x} = 0$

g) $\lim \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2} = \lim \dfrac{\dfrac{-3 \text{ sen } 3x}{\cos 3x}}{2x} = \lim \dfrac{-3 \text{ tg } 3x}{2x} =$

$= \lim \dfrac{-9(1 + \text{tg}^2 3x)}{2} = -\dfrac{9}{2}$

h) $\lim \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt[4]{x^3}} = \lim \dfrac{\dfrac{1}{1 + x}}{\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}} = \lim \dfrac{4\sqrt[4]{x}}{3(1 + x)} = 0$

i) $\lim \dfrac{1 - \cos^2 (2x)}{3x^2} = \lim \dfrac{2 \cos (2x) \text{ sen } (2x) \cdot 2}{6x} = \lim \dfrac{2 \text{ sen } 4x}{6x} =$

$= \lim \dfrac{\text{sen } 4x}{3x} = \lim \dfrac{4 \cos 4x}{3} = \dfrac{4}{3}$

j) $\lim \left(\dfrac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x}\right) = \lim \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen } x + x \cos x} = \lim \dfrac{\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x} = 0$

55 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \cos x \ln(\text{tg } x)$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \text{sen } x)^{1/x}$

c) $\lim\limits_{x \to \pi/2^-} (\text{tg } x)^{\cos x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + x^3)^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 + x)^{1/x}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right)$

g) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \text{sen } 2x)^{\text{cotg } 3x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\text{tg } x}$

a) $\lim \cos x \ln (tg\, x) = (0 \cdot +\infty) = \lim \dfrac{\ln (tg\, x)}{\dfrac{1}{\cos x}} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) =$

$$= \lim \frac{\dfrac{1 + tg^2 x}{tg\, x}}{\dfrac{sen\, x}{\cos^2 x}} = \lim \frac{1 + tg^2 x}{\dfrac{tg^2 x}{\cos x}} = \lim \frac{\cos x(1 + tg^2 x)}{tg^2 x} =$$

$$= \lim \cos x \left(\frac{1}{tg^2 x} + 1\right) = 0 \cdot 1 = 0$$

b) $\lim (\cos x + sen\, x)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \ln (\cos x + sen\, x)^{1/x} = \lim \frac{\ln (\cos x + sen\, x)}{x} = \lim \frac{-sen\, x + \cos x}{\cos x + sen\, x} = 1$$

Por tanto: $\lim (\cos x + sen\, x)^{1/x} = e$

c) $\lim (tg\, x)^{\cos x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \ln (tg\, x)^{\cos x} = \lim \cos x \cdot \ln (tg\, x) \overset{(*)}{=} 0 \qquad ^{(*)}\text{(ver apartado a))}$$

Por tanto: $\lim (tg\, x)^{\cos x} = e^0 = 1$

d) $\lim (e^x + x^3)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \ln (e^x + x^3)^{1/x} = \lim \frac{\ln (e^x + x^3)}{x} = \lim \frac{e^x + 3x^2}{e^x + x^3} = 1$$

Por tanto: $\lim (e^x + x^3)^{1/x} = e$

e) $\lim (1 + x)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim \ln (1 + x)^{1/x} = \lim \frac{\ln (1 + x)}{x} = \lim \frac{1}{1 + x} = 0$$

Por tanto: $\lim (1 + x)^{1/x} = e^0 = 1$

f) $\lim x \ln\left(\dfrac{1 + x}{x}\right) = \lim x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = \lim \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x =$

$$= \ln\left[\lim \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e = 1$$

g) $\lim (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = \lim (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim\ ln\ (1 - sen\ 2x)^{1/tg\ 3x} = \lim \frac{ln\ (1 - sen\ 2x)}{tg\ 3x} = \lim \frac{\dfrac{-2\ cos\ 2x}{1 - sen\ 2\ x}}{(1 + tg^2\ 3x) \cdot 3} = \frac{-2}{3}$$

Por tanto: $\lim (1 - sen\ 2x)^{cotg\ 3x} = e^{-2/3}$

h) $\lim \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\ x}$. Tomamos logaritmos:

$$\lim\ ln \left(\frac{1}{x}\right)^{tg\ x} = \lim\ tg\ x\ ln \left(\frac{1}{x}\right) = \lim\ [tg\ x\ (-ln\ x)] = \lim \frac{sen\ x\ (-ln\ x)}{cos\ x} =$$

$$= \lim \frac{-ln\ x}{\dfrac{cos\ x}{sen\ x}} = \lim \frac{\dfrac{-1}{x}}{\dfrac{-1}{sen^2\ x}} = \lim \frac{sen^2\ x}{x} = \lim \frac{2\ sen\ x\ cos\ x}{1} = 0$$

Por tanto: $\lim \left(\dfrac{1}{x}\right)^{tg\ x} = e^0 = 1$

56 S **Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\ x}{e^x - 1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{tg\ x - 8}{sec\ x + 10}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - cos\ x + x^2}{2x^2}$

a) $\lim \dfrac{1 - cos\ x}{e^x - 1} = \lim \dfrac{sen\ x}{e^x} = 0$

b) $$\lim \frac{tg\ x - 8}{sec\ x + 10} = \lim \frac{\dfrac{1}{cos^2\ x}}{\dfrac{sen\ x}{cos^2\ x}} = \lim \frac{1}{sen\ x} = 1$$

c) $\lim \dfrac{1 - cos\ x + x^2}{2x^2} = \lim \dfrac{sen\ x + 2x}{4x} = \lim \dfrac{cos\ x + 2}{4} = \dfrac{3}{4}$

Página 301

57 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{sen\ x} - \dfrac{1}{x}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to \pi/4} \left(\dfrac{1}{cos\ 2x} - \dfrac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{e}{e^x - e} - \dfrac{1}{x - 1}\right)$

a) $\text{lím} \left(\dfrac{1}{\text{sen } x} - \dfrac{1}{x} \right) = \text{lím} \dfrac{x - \text{sen } x}{x \text{ sen } x} = \text{lím} \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen } x + x \cos x} =$

$$= \text{lím} \frac{\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x \text{ sen } x} = \frac{0}{2} = 0$$

b) $\text{lím} \left(\dfrac{1}{\cos 2x} - \dfrac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)} \right) = \text{lím} \dfrac{1 - (4x/\pi) - tg\ x \cdot \cos 2x}{(\cos 2x)(1 - (4x/\pi))} =$

$$= \text{lím} \frac{-4/\pi - \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + 2\ tg\ x \cdot \text{sen } 2x}{-2 \text{ sen } 2x(1 - (4x/\pi)) + \cos 2x \cdot (-4/\pi)} = \frac{2 - 4/\pi}{0}$$

Hallamos los límites laterales:

$\text{lím} \ f(x) = -\infty, \qquad \text{lím} \ f(x) = +\infty \qquad \left(\text{siendo } f(x) = \dfrac{1}{\cos 2x} - \dfrac{tg\ x}{1 - (4x/\pi)} \right).$

c) $\text{lím} \left(\dfrac{e}{e^x - e} - \dfrac{1}{x - 1} \right) = \text{lím} \dfrac{e \cdot x - e - e^x + e}{(e^x - e)(x - 1)} = \text{lím} \dfrac{e \cdot x - e^x}{(e^x - e)(x - 1)} =$

$$= \text{lím} \frac{e - e^x}{e^x(x - 1) + (e^x - e)} = \text{lím} \frac{-e^x}{e^x(x - 1) + e^x + e^x} = \frac{-e}{2e} = \frac{-1}{2}$$

58 **Calcula:**

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$ **b)** $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} (e^{1/x} + e^{2/x})^x$

a) $\text{lím} \ (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\text{lím} \ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \text{lím} \ x\ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot +\infty) =$$

$$= \text{lím} \frac{ln\ (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \text{lím} \frac{\dfrac{e^{1/x} \cdot (-1/x^2) + e^{2/x} \cdot (-2/x^2)}{e^{1/x} + e^{2/x}}}{-1/x^2} =$$

$$= \text{lím} \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \overset{(*)}{=} \text{lím} \frac{e^{-1/x} + 2}{e^{-1/x} + 1} = \frac{2}{1} = 2$$

((*) Dividimos numerador y denominador entre $e^{2/x}$).

Por tanto: $\text{lím} \ (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^2$

b) $\text{lím} \ (e^{1/x} + e^{2/x})^x$. Tomamos logaritmos:

$$\text{lím} \ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x})^x = \text{lím} \ x\ ln\ (e^{1/x} + e^{2/x}) = (0 \cdot -\infty) =$$

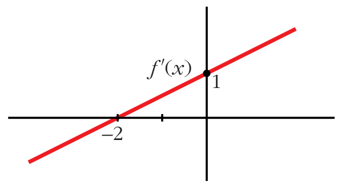
$$= \lim \frac{\ln (e^{1/x} + e^{2/x})}{1/x} = \lim \frac{e^{1/x} + 2e^{2/x}}{e^{1/x} + e^{2/x}} \overset{(*)}{=} \lim \frac{1 + 2e^{1/x}}{1 + e^{1/x}} = \frac{1}{1} = 1$$

($^{(*)}$ Dividimos numerador y denominador entre $e^{1/x}$).

Por tanto: $\lim (e^{1/x} + e^{2/x})^x = e^1 = e$

CUESTIONES TEÓRICAS

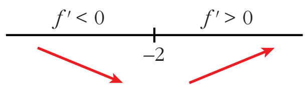
59 La gráfica adjunta corresponde a la función derivada, f', de una función f.



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene máximo o mínimo.

b) Estudia la concavidad y convexidad de f. ¿Tiene punto de inflexión?

a) Signo de la derivada:



$f'(-2) = 0$

Por tanto, la función f es decreciente en $(-\infty, -2)$

es creciente en $(-2, +\infty)$

tiene un mínimo en $x = -2$.

b) Como $f'(x)$ es una recta con pendiente $\frac{1}{2}$, entonces $f''(x) = \frac{1}{2} > 0$.

Por tanto, f es una función cóncava. No tiene puntos de inflexión.

60 Encuentra una función f cuya gráfica no sea una recta y en la que existan infinitos puntos en los que la recta tangente a la gráfica de f sea $y = 1$.

$f(x) = \cos x$

Veamos que la recta tangente a $f(x)$ en los puntos de la forma $x = 2\pi k$, con $k \in Z$, es $y = 1$.

$f(2\pi k) = \cos (2\pi k) = 1$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x \rightarrow f'(2\pi k) = -\operatorname{sen} (2\pi k) = 0$

La recta tangente es:

$y = 1$

61 **Sea $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, con a y b números positivos. Demuestra que el valor mínimo de f en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.**

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = \frac{ax^2 - b}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\rightarrow\;\; ax^2 - b = 0 \;\;\rightarrow\;\; x = \pm$$

$$f''(x) = \frac{2b}{x^3}$$

$$f''\Big(\qquad\Big) > 0 \;\;\rightarrow\;\; \text{en } x = \qquad \text{hay un mínimo.}$$

$$f''\Big(-\qquad\Big) < 0 \;\;\rightarrow\;\; \text{en } x = - \qquad \text{hay un máximo.}$$

Además, $lím\; f(x) = +\infty$ y $lím\; f(x) = +\infty$.

Luego, en $x =$ se encuentra el mínimo absoluto de $f(x)$.

Este mínimo vale:

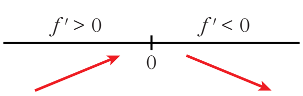
$$f\Big(\qquad\Big) = a \cdot \qquad + \frac{b}{\sqrt{b/a}} = \frac{a\sqrt{b}}{} + \frac{b\sqrt{a}}{} = \sqrt{ab} + \sqrt{ab} = 2\sqrt{ab}$$

Es decir, el mínimo de $f(x)$ en $(0, +\infty)$ es $2\sqrt{ab}$.

62 **Si la función f tiene derivadas primera y segunda y es $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$, ¿puede presentar f un máximo relativo en el punto a? En caso afirmativo, pon un ejemplo.**

Sí puede presentar un máximo. Por ejemplo:

$f(x) = -x^4$ en $x = 0$ es tal que:



$f'(x) = -4x^3$ $\qquad f''(x) = -12x^2$

Por tanto: $f'(0) = 0$ y $f''(0) = 0$

En $(0, 0)$ hay un máximo relativo.

63 **Una función f es decreciente en el punto a y derivable en él.**

¿Puede ser $f'(a) > 0$?

¿Puede ser $f'(a) = 0$?

¿Puede ser $f'(a) < 0$? Razónalo.

Si f es decreciente en $x = a$ y es derivable en él, entonces $f'(a) \leq 0$.

Lo probamos:

$$f \text{ decreciente en } a \;\rightarrow\; \text{signo de } [f(x) - f(a)] \neq \text{signo de } (x - a) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$$

Por tanto, $f'(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$; es decir: $f'(a) \leq 0$

Ejemplo: $f'(a) = -x^3$ es decreciente en $\mathbb{R}$ y tenemos que:

$$f'(x) = -3x^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} f'(0) = 0 \;\; (\text{y } f(x) \text{ es decreciente en } x = 0) \\ f'(0) < 0 \;\; \text{para } x \neq 0 \end{cases}$$

64 **Si la derivada de una función f es positiva en el punto $x = 0$, es decir, $f'(0) > 0$, ¿para qué valores de h se puede afirmar que el incremento $f(\text{h}) - f(0)$ es negativo?**

$$f'(0) = \lim_{\text{h} \to 0} \frac{f(\text{h}) - f(0)}{\text{h}} > 0 \;\rightarrow$$

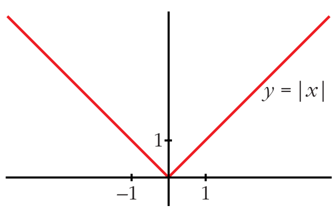
$$\rightarrow\; \text{signo de } [f(\text{h}) - f(0)] = \text{signo de h (para h “próximo a cero”)}$$

Luego, si $f(\text{h}) - f(0) < 0$, ha de ser $\text{h} < 0$.

65 **La función $|x|$ (valor absoluto de x), ¿presenta un mínimo relativo en algún punto? ¿En qué puntos es derivable? Razónalo.**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0^-) = -1 \neq f'(0^+) = 1$.



Por tanto, f es derivable para $x \neq 0$.

Pero $f(x)$ presenta un mínimo relativo en $x = 0$, pues $f(0) = 0 < f(x)$ si $x \neq 0$. De hecho, es el mínimo absoluto de $f(x)$.

66 **En la ecuación de la recta $y = mx + b$, explica cómo se determinarían los números m y b para que sea tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto en que esta tiene de abscisa p.**

La ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = p$ es:

$y = f(p) + f'(p) \cdot (x - p)$; es decir:

$y = f'(p)\, x + [f(p) - p \cdot f'(p)]$

Por tanto, si la recta es $y = mx + b$, tenemos que:

$$m = f'(p); \quad b = f(p) - p \cdot f'(p)$$

67 S **Un polinomio de 3$^{\underline{er}}$ grado $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene un máximo relativo en el punto $x = p$. Ese máximo relativo, ¿puede ser máximo absoluto de la función? Razónalo.**

Un polinomio de tercer grado *no* tiene máximo absoluto.

Veamos por qué:

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a > 0$, entonces:

  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad f(x)$ *no* tiene máximo absoluto.

- Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, con $a < 0$, entonces:

  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \to \quad f(x)$ *no* tiene máximo absoluto.

68 **Si la derivada de una función f es positiva para todos los valores de la variable, ¿puede haber dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$? Razónalo.**

No es posible, si la función es derivable (y nos dicen que lo es, pues $f'(x) > 0$ para todo x).

Lo probamos por reducción al absurdo:

Supongamos que existen dos números distintos, a y b, tales que $f(a) = f(b)$.

$f(x)$ es derivable para todo x. Por el teorema de Rolle, habría un punto c, en el que $f'(c) = 0$.

Esto contradice el que $f'(x) > 0$ para todo x.

69 **Si $f''(x) > 0$ para todo x del dominio de f, ¿qué podemos decir de la gráfica de f?**

Será una función cóncava.

70 S **De una función f sabemos que $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$ y $f'''(a) = 5$. ¿Podemos asegurar que f tiene máximo, mínimo o punto de inflexión en $x = a$?**

f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

Veamos por qué:

$f'''(a) = 5 > 0 \quad \to \quad f''$ es creciente en $x = a$.

Como, además, $f''(a) = 0$, tenemos que $f''(x) < 0$ a la izquierda de a y $f''(x) > 0$ a su derecha. Es decir, $f(x)$ cambia de convexa a cóncava en $x = a$.

Por tanto, hay un punto de inflexión en $x = a$.

71 **Si $f'(a) = 0$, ¿cuál de estas proposiciones es cierta?**
S

a) f tiene máximo o mínimo en $x = a$.

b) f tiene una inflexión en $x = a$.

c) f tiene en $x = a$ tangente paralela al eje OX.

Si $f'(a) = 0$, solo podemos asegurar que f tiene en $x = a$ tangente horizontal (paralela al eje OX).

Podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión en $x = a$.

Por tanto, solo es cierta la proposición c).

Página 302

72 **Si $y = f(x)$ es una función creciente en $x = a$, ¿se puede asegurar que $g(x) = -f(x)$ es decreciente en $x = a$?**

$f(x)$ es creciente en $x = a \;\to\; \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$.

Como $g(x) = -f(x)$, tenemos que:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{-f(x) + f(a)}{x - a} = -\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right) < 0$$

$\to\; g(x)$ es decreciente en $x = a$

73 **Se tiene la función:**
S

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \le x \le -1 \\[2mm] \dfrac{x^2 - 3}{2} & \text{si } -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

Prueba que f satisface la hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$ y calcula el o los puntos en los que se cumple el teorema.

• Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

— **Si $x \ne -1$** $\to$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos funciones continuas.

— **Si $x = -1$:**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{1}{x}\right) = -1 \\[4mm] \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \left(\dfrac{x^2 - 3}{2}\right) = -1 \\[4mm] f(1) = -1 \end{array}\right\} \; f(x) \text{ es continua en } x = -1$$

— Por tanto, $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$.

• Veamos que $f(x)$ es continua en $[-2, 0]$:

— **Si $x \neq -1$ y $x \in (-2, 0)$,** f es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x < -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$$

— **En $x = -1$,** tenemos que:

$f'(-1^-) = -1 = f'(-1^+)$

Por tanto $f(x)$ es derivable en $(-2, 0)$.

— Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^2} & \text{si } -2 < x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

• Como $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[-2, 0]$, existe algún punto, $c \in (-2, 0)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-2)}{0 - (-2)} = \dfrac{-3/2 - (-1/2)}{2} = \dfrac{-1}{2}$.

Calculamos c:

— $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ si $-2 < x \leq -1$

$$-\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{2} \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = -\sqrt{2} \in (-2, -1) \\ x = \sqrt{2} \notin (-2, -1) \end{cases}$$

— $f'(x) = x$ si $-1 \leq x < 0$

$$x = -\frac{1}{2} \in (-1, 0)$$

— Por tanto, hay dos soluciones:

$$c_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } c_2 = -\sqrt{2}$$

74 **¿Es posible calcular a, b, c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, c]$?

• Calculamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable.

• Continuidad:

— **Si $x \neq 1$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— **En $x = 1$,** tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (5x + 1) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (ax^2 + bx + 3) = a + b + 3 \\ f(1) = a + b + 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ a + b + 3 = 6, \text{ es decir, } a + b = 3.\end{array}$$

• Derivabilidad:

— **Si** $\boldsymbol{x \neq 1}$ $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Además: $f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 2ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$

— **En** $\boldsymbol{x = 1}$, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 5 \\ f'(1^+) = 2a + b \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser: } 2a + b = 5$$

• Con las dos condiciones obtenidas, hallamos a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b = 3 - a \\ 2a + 3 - a = 5 \quad \rightarrow \quad a = 2 \quad \rightarrow \quad b = 1 \end{array}$$

• Con estos valores de a y b, queda:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2 + x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x < 1 \\ 4x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ $f(x)$ es creciente $\rightarrow$ No existe ningún valor de c tal que $f(0) = f(c)$ $\rightarrow$ No existe ningún c tal que $f(x)$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, c]$.

75 S **La función $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$, ¿cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [0, 4]?**

En caso afirmativo, di cuál es el x_0 que cumple la tesis.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es continua en $[0, 4]$ y derivable en $(0, 4)$; luego cumple las hipótesis del teorema del valor medio en $[0, 4]$.

Veamos en qué punto, o puntos, cumple la tesis:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{-6 - (-2)}{4} = \frac{-6 + 2}{4} = -1$$

$$f'(x) = -1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 10x + 3 = -1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 10x + 4 = 0$$

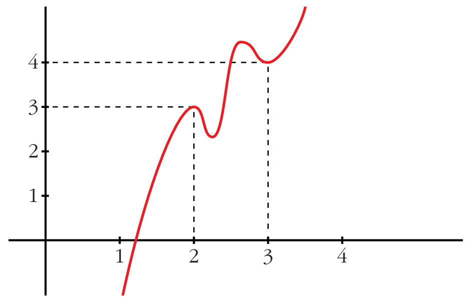
$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 48}}{6} = \frac{10 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{10 \pm 2\sqrt{13}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Hay dos puntos: $x_0 = \dfrac{5 - \sqrt{13}}{3}$ y $x_1 = \dfrac{5 + \sqrt{13}}{3}$

76 **S** **a) Si es posible, dibuja la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga, al menos, un máximo relativo en el punto (2, 3) y un mínimo relativo en el punto (3, 4).**

b) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

a) Por ejemplo:

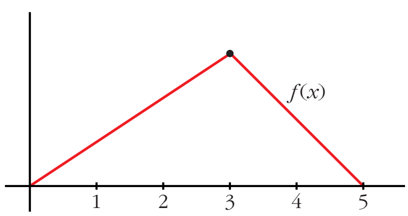


b) Si $f(x)$ es derivable, para que sea posible lo anterior, debe haber, al menos, otro máximo y otro mínimo.

Por tanto, la derivada se anularía, al menos, en cuatro puntos. Luego la función, si fuera polinómica, tendría, al menos, grado 5.

77 **S** **¿Puede existir una función f definida en el intervalo $I = [0, 5]$ continua en todos los puntos de I, que tenga un máximo local en el punto $x = 3$, pero que no sea derivable en $x = 3$?**

Sí. Por ejemplo:



- $f(x)$ es continua en $[0, 5]$.
- $f(x)$ no es derivable en $x = 3$, pues $f'(3^-) \neq f'(3^+)$.
- $f(x)$ tiene un máximo en $x = 3$.

78 **Comprueba que $f(x) = x^3 - 18x$, definida en el intervalo $\left[0, 3\sqrt{2}\right]$, verifica las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el valor $c \in \left(0, 3\sqrt{2}\right)$ para el que $f'(c) = 0$.**

$f(x) = x^3 - 18x$ es derivable en todo $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, 3\sqrt{2}]$ y derivable en $(0, 3\sqrt{2})$.

Además, $f(0) = f(3\sqrt{2}) = 0$. Luego, verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 3\sqrt{2}]$.

Existe, pues, un $c \in (0, 3\sqrt{2})$ tal que $f'(c) = 0$.

Lo calculamos: $f'(x) = 3x^2 - 18 = 0 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{6} \begin{cases} x = -\sqrt{6} & \notin (0, 3\sqrt{2}) \\ x = \sqrt{6} & \in (0, 3\sqrt{2}) \end{cases}$

Por tanto, $c = \sqrt{6}$.

79 **La función $f(x) = |\cos x|$ toma en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ el valor 1. ¿Cumplirá el teorema de Rolle?**

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \le x \le \pi/2 \\ -\cos x & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases} \quad \text{es continua en } [0, \pi]$$

Además, $f(0) = f(\pi) = 1$.

La derivada de $f(x)$, si $x \neq \frac{\pi}{2}$ es:

$$f'(x) = \begin{cases} -sen\, x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ sen\, x & \text{si } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

Como $f'\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = -1 \neq f'\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = 1$, $f(x)$ *no* es derivable en $x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

Por tanto, $f(x)$ *no* es derivable en el intervalo $(0, \pi)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

80 **Calcula a y b para que:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [2, 6]. ¿Dónde cumple la tesis?

- Continuidad:

  — **Si $x \neq 4$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

  — **En $x = 4$**, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4} (ax - 3) = 4a - 3 \\ &\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4} (-x^2 + 10x - b) = 24 - b \\ &f(4) = 24 - b \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{Para que sea continua, ha de ser:} \\ &4a - 3 = 24 - b; \text{ es decir:} \\ &4a + b = 27 \end{aligned}$$

- Derivabilidad:

  — **Si $x \neq 4$** $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

  — **En $x = 4$:**

$$\left.\begin{aligned} f'(4^-) &= a \\ f'(4^+) &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ Para que sea derivable, ha de ser: } a = 2$$

• Uniendo los dos resultados obtenidos:

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 27 \\ a = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 19 \end{array}$$

• Por tanto, si $a = 2$ y $b = 19$, se cumplen las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo $[2, 6]$.

En este caso, quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - 19 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 4 \\ -2x + 10 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

• Veamos dónde cumple la tesis:

$$\frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$-2x + 10 = 1 \rightarrow x = \frac{9}{2} \in (2, 6)$$

La tesis se cumple en $c = \dfrac{9}{2}$.

81 **Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$.**

Prueba que $f(1) = f(-1) = 0$, pero que $f'(x)$ no es nunca cero en el intervalo $[-1, 1]$. Explica por qué este resultado contradice aparentemente el teorema de Rolle.

$$f'(x) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x}} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

Por tanto, $f(x)$ *no* es derivable en el intervalo $(-1, 1)$; y no podemos aplicar el teorema de Rolle.

82 **Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.**

Si $f(x)$ es continua en $[0, 5]$ y derivable en $(0, 5)$, por el teorema del valor medio, podemos asegurar que existe $c \in (0, 5)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0}$$

En este caso: $f'(c) = \dfrac{f(5) - 3}{5 - 0} = \dfrac{f(5) - 3}{5} = 8 \rightarrow f(5) = 43$

83 **Calcula a, b y c para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 4]$. ¿En qué punto se cumple la tesis?

• Continuidad:

— **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ $f(x)$ es continua, pues está formada por dos polinomios.

— **En $x = 2$**, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (cx + 1) = 2c + 1 \\ f(2) = 2c + 1 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4 + 2a + b = 2c + 1$; es decir: $2a + b - 2c = -3$

• Derivabilidad:

— **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ $f(x)$ es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 2 \\ c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

— **En $x = 2$:**

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 + a \\ f'(2^+) = c \end{array}\right\} \text{ Para que sea derivable, ha de ser: } 4 + a = c$$

• $$\left.\begin{array}{l} f(0) = b \\ f(4) = 4c + 1 \end{array}\right\} b = 4c + 1$$

• Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, 4]$, ha de cumplirse que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a + b - 2c = -3 \\ 4 + a = c \\ b = 4c + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -3 \\ b = 5 \\ c = 1 \end{array}$$

En este caso, sería:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y se cumplirían las hipótesis del teorema de Rolle.

• Veamos dónde se cumple la tesis:

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2} \in (0, 4)$$

Por tanto, la tesis se cumple en $x = \dfrac{3}{2}$.

84 **Enuncia el teorema de Rolle. ¿Es posible asegurar, utilizando dicho teorema, que la función $f(x) = sen(x^2) + x^2$ es tal que su derivada se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$? Justifica la respuesta.**

- **Teorema de Rolle:** Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) con $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- Si $f(x) = sen\,(x^2) + x^2$, tenemos que:

  — Es continua en $\mathbb{R}$; y, por tanto, en $[-1, 1]$.

  — Es derivable en $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x\,cos\,(x^2) + 2x$; y, por tanto, en $(-1, 1)$.

  — Además, $f(-1) = f(1) = (\text{sen } 1) + 1$.

  Luego, cumple las hipótesis del teorema de Rolle.

Por tanto, podemos asegurar que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

85 **En cada uno de los ejemplos que se dan a continuación, es $f(a) = f(b)$ y, sin embargo, no hay ningún número $z \in (a, b)$ para el que sea $f'(z) = 0$.**

Explica, en cada caso, por qué el ejemplo no va en contra del teorema de Rolle.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $[a, b] = [-2, 2]$ **b)** $f(x) = 1 - |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$

a) $f(x)$ no es continua ni derivable en $x = 0 \in (-2, 2)$, pues no está definida en ese valor.

b) $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \le x < 1 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$

$f(x)$ no es derivable en $x = 0 \in (-1, 1)$; puesto que $f'(0^-) = 1 \ne f'(0^+) = -1$.

Página 303

86 **Calcula b para que $f(x) = x^3 - 4x + 3$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, b]$. ¿Dónde cumple la tesis?**

$f(x)$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$; por tanto, es continua en $[0, b]$ y derivable en $(0, b)$, cualquiera que sea el valor de b.

Para que cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en $[0, b]$, ha de tenerse que $f(0) = f(b)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(b) = b^3 - 4b + 3 \end{array}\right\} \quad b^3 - 4b + 3 = 3 \quad \to \quad b^3 - 4b = 0$$

$$b(b^2 - 4) = 0 \begin{cases} b = 0 & \text{(no vale)} \\ b = -2 & \text{(no vale)} \\ b = 2 \end{cases}$$

(Como consideramos el intervalo $[0, b]$, ha de ser $b > 0$).

Por tanto, el teorema de Rolle se cumple en $[0, 2]$.

Veamos dónde cumple la tesis:

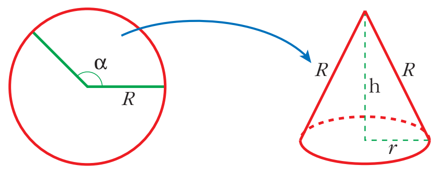
$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad x = \pm$$

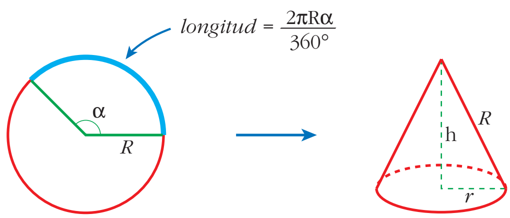
La tesis se cumple en $c =$ $\in (0, 2)$; es decir, $c = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

PARA PROFUNDIZAR

87 **Si de un disco metálico quitamos un sector circular, podemos construir un vaso cónico.**

Determina el sector circular que debemos quitar para que el volumen del vaso sea máximo.





• Longitud de la circunferencia de la base del cono:

$$L = 2\pi r = \frac{2\pi R\alpha}{360} \quad \rightarrow \quad r = \frac{R\alpha}{360}$$

• Altura del cono: $h = \sqrt{R^2 - r^2} =$ $= \dfrac{R}{360}\sqrt{129\,600 - \alpha^2}$

• Volumen del cono:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{R^2\alpha^2}{360^2} \cdot \frac{R}{360} \cdot \sqrt{129\,600 - \alpha^2} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}$$

• Hallamos α para que el volumen sea máximo:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{360}\right)^3 \cdot \frac{518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5}{2\sqrt{129\,600\,\alpha^4 - \alpha^6}}$$

$$V'(\alpha) = 0 \quad \rightarrow \quad 518\,400\alpha^3 - 6\alpha^5 = 0$$

$$6\alpha^3(86\,400) - \alpha^2) = 0 \quad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = 293°\ 56'\ 20'' \\ \alpha = -293°\ 56'\ 20'' \end{cases}$$

El máximo se alcanza en $\alpha = 293° \ 56' \ 20''$ (la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha, y estamos considerando x entre 0° y 360°).

Así, el cono tendrá radio $r = \dfrac{R\sqrt{6}}{3}$ y altura $h = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$.

Su volumen sería $\dfrac{2\pi R^3 \cdot \sqrt{3}}{27}$.

88 **Las manecillas de un reloj miden 4 y 6 cm y, uniendo sus extremos, se forma un triángulo. Determina el instante entre las 12 h y las 12 h 30 min en el que el área del triángulo es máxima.**

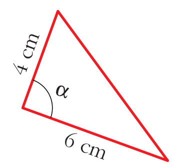
¿Qué ángulo recorre la aguja horaria en t minutos? ¿Y el minutero? ¿Cuál es el ángulo que forman entre las dos en t minutos?

- La aguja horaria recorre un ángulo de 360° en 12 horas; es decir, 0,5° en 1 minuto; o bien $0{,}5t°$ en t minutos.

- El minutero recorre 360° en 1 hora; es decir, 6° en 1 minuto; o bien $6t°$ en t minutos.

- Al cabo de t minutos, las dos agujas formarán un ángulo de $\alpha = 6t° - 0{,}5t° = 5{,}5t°$.

- El área del triángulo será:



$$\text{Área} = \frac{4 \cdot 6 \cdot sen\,(5{,}5t)}{2} = 12\ sen\,(5{,}5t)$$

$$A(t) = 12\ sen\,(5{,}5t)$$

- Hallamos el máximo de $A(t)$, teniendo en cuenta que $t \in (0, 30)$ (pues estamos considerando entre las 12 h y las 12 h 30 min):

$$A'(t) = 12 \cdot 5{,}5 \cdot cos\,(5{,}5t) = 0 \overset{(*)}{\rightarrow} 5{,}5t = 90 \rightarrow t = \frac{90}{5{,}5} =$$

$$= 16{,}\widehat{36} = 16 \text{ minutos y } 22 \text{ segundos}$$

(*) (Si igualamos $5{,}5t$ a un ángulo mayor de 90°, obtenemos $t > 30$ min).

(En $t = 16{,}\widehat{36}$ minutos hay un máximo, pues la derivada es positiva a su izquierda y negativa a su derecha).

Por tanto, el triángulo de área máxima se forma a las 12 h 16 min 22 segundos.

89 **Comprueba que, en la función de proporcionalidad inversa $f(x) = \dfrac{k}{x}$, se tiene que el punto c, que cumple $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, es, precisamente, la media geométrica de a y b, $c = \sqrt{ab}$.**

$$\left.\begin{array}{l} f'(c) = \dfrac{-k}{c^2} \\[2ex] \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\dfrac{k}{b} - \dfrac{k}{a}}{b - a} = \dfrac{\dfrac{ka - kb}{ab}}{b - a} = \dfrac{-k(b - a)}{ab(b - a)} = \dfrac{-k}{ab} \end{array}\right\}$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \to \quad \frac{-k}{c^2} = \frac{-k}{ab} \quad \to \quad c^2 = ab \quad \to \quad c = \sqrt{ab}$$

(Suponemos $k > 0$, $a > 0$, $b > 0$).

90 **Calcula el valor de k para que la expresión $\lim\limits_{x \to 0} (e^x + kx)^{1/x}$ sea igual a e^4.**

$\text{lím}\ (e^x + kx)^{1/x}$. Tomamos logaritmos:

$$\text{lím}\ \ln (e^x + kx)^{1/x} = \text{lím}\ \frac{\ln (e^x + kx)}{x} \overset{(*)}{=} \text{lím}\ \frac{e^x + k}{e^x + kx} = \frac{1 + k}{1} = 1 + k$$

(*) Hemos aplicado la regla de L'Hôpital.

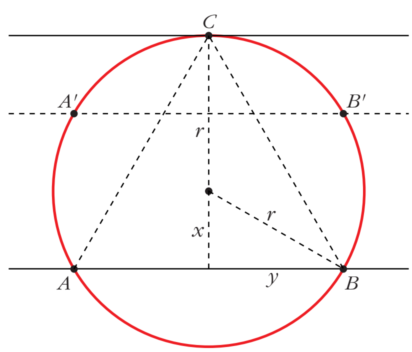
Por tanto: $\text{lím}\ (e^x + kx)^{1/x} = e^{1+x}$

Para que sea igual a e^4, ha de ser:

$$e^{1+x} = e^4 \quad \to \quad 1 + k = 4 \quad \to \quad k = 3$$

91 **En una circunferencia de radio r se traza la tangente en un punto cualquiera C y una cuerda AB paralela a dicha tangente. Obtenemos, así, un triángulo ABC cuya área queremos que sea la mayor posible.**

Demuestra que, para ello, la distancia de C a la cuerda debe ser $\frac{3}{2}$ del radio.



- La altura del triángulo ha de ser mayor que el radio, pues, si trazamos la cuerda por $A'B'$, podemos conseguir otro triángulo con la misma base, AB, y mayor altura; y, así, con mayor área.

- Expresamos el área del triángulo en función de x:

$$\textit{altura} = x + r$$

$$\left.\begin{array}{l} \textit{base} = 2y \\ y = \sqrt{r^2 - x^2} \end{array}\right\} \quad \to \quad \textit{base} = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\textit{Área} = \frac{2(x + r)\sqrt{r^2 - x^2}}{2} = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}\,; \quad x \in [0,\ r)$$

- Obtenemos el valor de x para el que $A(x)$ alcanza el máximo:

$$A'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (x + r) \cdot \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{r^2 - x^2 - x^2 - rx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \quad \to \quad -2x^2 - rx + r^2 = 0$$

$$x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8r^2}}{-4} = \frac{r \pm \sqrt{9r^2}}{-4} = \frac{r \pm 3r}{-4} \begin{cases} x = -r \ \text{(no vale)} \\ x = -2r/-4 = r/2 \end{cases}$$

(En $x = \dfrac{r}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \dfrac{r}{2}$. Por tanto, la distancia de C a la cuerda, que es la altura del triángulo, es:

$$\text{h} = r + \frac{r}{2} = \frac{3r}{2}$$

- **Observación:**

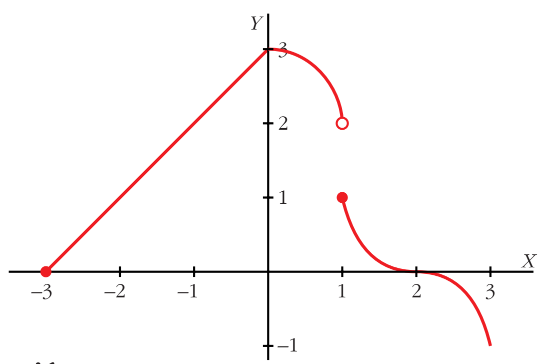
Vamos a calcular la longitud de los lados del triángulo:

$$AB = base = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

$$AC = BC = \sqrt{y^2 - \text{h}^2} = \sqrt{(r^2 - x^2) + \left(\frac{3r}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4} + \frac{9r^2}{4}} = r\sqrt{3}$$

Por tanto, hemos obtenido que el triángulo inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el triángulo equilátero.

92 S **De la función $f(x)$ definida en [–3, 3] se conoce su gráfica, dada por:**



a) Estudia la continuidad de la función.

b) Estudia la derivabilidad de la función.

c) Dibuja razonadamente la gráfica de $f'(x)$.

a) La función es continua en todo su dominio, excepto en $x = 1$; puesto que:

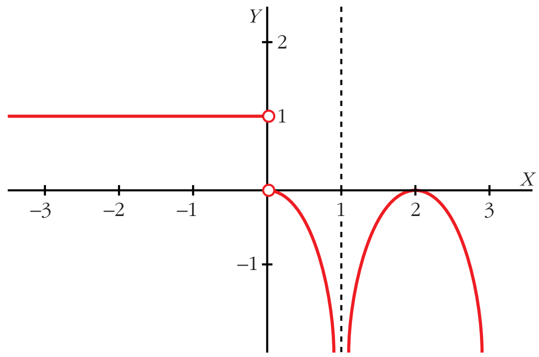
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \text{ En } x = 1 \text{ hay una discontinuidad de salto finito.}$$

b) La función es derivable, excepto en $x = 0$ y en $x = 1$.

En $x = 0$ hay "un pico"; es decir, $f'(0^-) \neq f'(0^+)$.

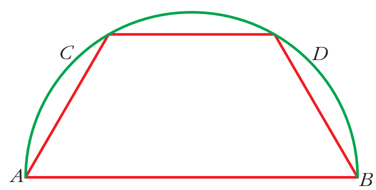
En $x = 1$ *no* es continua la función; por tanto, no puede ser derivable.

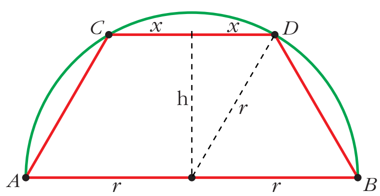
c)



PARA PENSAR UN POCO MÁS

93 **En una semicircunferencia de diámetro *AB* = 2*r* se traza una cuerda *CD* paralela a *AB*. ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio *ABDC* sea máxima?**





- Llamamos x a la mitad de la base CD; es decir, a la mitad de la longitud de la cuerda.

- La altura del trapecio será:

$$\text{h} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

- El área del trapecio es:

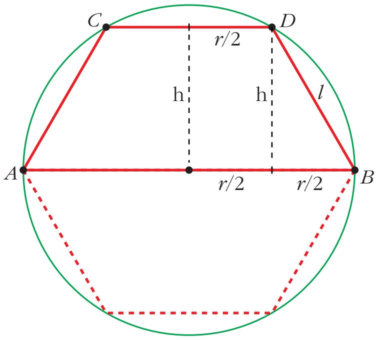
$$\acute{A}rea = \frac{(2r + 2x) \cdot \text{h}}{2} = (r + x) \cdot \text{h} = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$A(x) = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in (0, r)$$

Esta función es la misma que obtuvimos en el ejercicio **91**; por tanto, alcanza el máximo en $x = \dfrac{r}{2}$ (ver dicho ejercicio).

• Así, la longitud de la cuerda es $2x = r$; es decir, $CD = r$.

Observación:



Si completamos la figura de forma simétrica, obtenemos un hexágono de área máxima inscrito en una circunferencia. Veamos que se trata de un hexágono regular:

$$CD = r$$

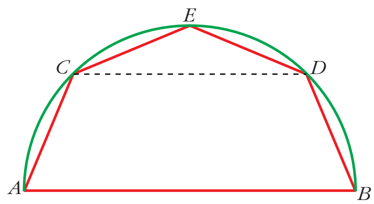
$$\text{h} = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4}}$$

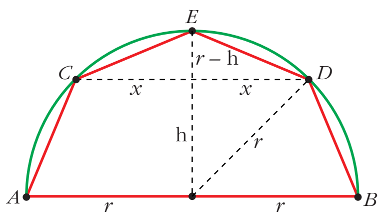
$$l = \sqrt{\text{h}^2 + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{\frac{3r^2}{4} + \frac{r^2}{4}} = \sqrt{r^2} = r$$

Luego el lado del hexágono es r, igual al radio de la circunferencia.

Por tanto, el hexágono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el hexágono regular.

94 **En la figura del problema anterior, llamamos E al punto medio del arco CD y dibujamos el pentágono $ACEDB$. Calcula la longitud de la cuerda CD para que el área del pentágono sea máxima.**





• Llamamos x a la mitad de la longitud de la cuerda CD.

• El área del pentágono es igual a la suma de las áreas del trapecio $CDBA$ y del triángulo CDE:

$$\text{h} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$Área = \frac{(2r + 2x) \cdot \text{h}}{2} + \frac{2x \cdot (r - \text{h})}{2} = (r + x) \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + x(r - \sqrt{r^2 - x^2}) =$$

$$= \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} + r\sqrt{r^2 - x^2} + xr - \cancel{x\sqrt{r^2 - x^2}} = xr + r\sqrt{r^2 - x^2} = r\left[x + \sqrt{r^2 - x^2}\right]$$

$$A(x) = r\left[x + \sqrt{r^2 - x^2}\right], \quad x \in (0, r)$$

• Hallamos el máximo de $A(x)$:

$$A'(x) = r\left[1 + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}}\right] = r\left[\frac{\sqrt{r^2 - x^2} - x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]$$

$$A'(x) = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2 - x^2} - x = 0 \;\rightarrow\; \sqrt{r^2 - x^2} = x$$

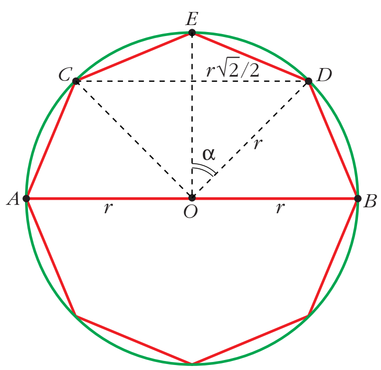
$$r^2 - x^2 = x^2 \;\rightarrow\; r^2 = 2x^2 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

(No consideramos la raíz negativa, pues $x \in (0, r)$).

(En $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ hay un máximo, pues $A'(x) > 0$ a la izquierda de este valor y $A'(x) < 0$ a su derecha).

- El máximo se alcanza en $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$; es decir, la longitud de la cuerda para la que obtenemos el área máxima es $CD = r\sqrt{2}$.

Observación 1:



Si completamos la figura anterior de forma simétrica, vemos que obtenemos un octógono regular:

$$sen\ \alpha = \frac{r\sqrt{2}/2}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \to \quad \alpha = 45°$$

es decir: $\widehat{EOD} = 45°$

Además:

$$\begin{cases} \widehat{EOC} = \widehat{EOD} \quad \to \quad \widehat{EOC} = 45° \\ \widehat{DOB} = 90° - \widehat{EOD} = 45° \\ \widehat{COA} = 90° - \widehat{EOC} = 45° \end{cases}$$

y $OA = OC = OE = OD = OB = r$

Por tanto, se trata de un octógono regular.

Así, hemos obtenido que el octógono inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el octógono regular.

Observación 2:

En el ejercicio **91** obtuvimos el resultado para un triángulo, en el ejercicio **93** para un hexágono y en este ejercicio para un octógono.

En general, se tiene que el polígono de n lados inscrito en una circunferencia que nos da el área máxima es el polígono regular de n lados.